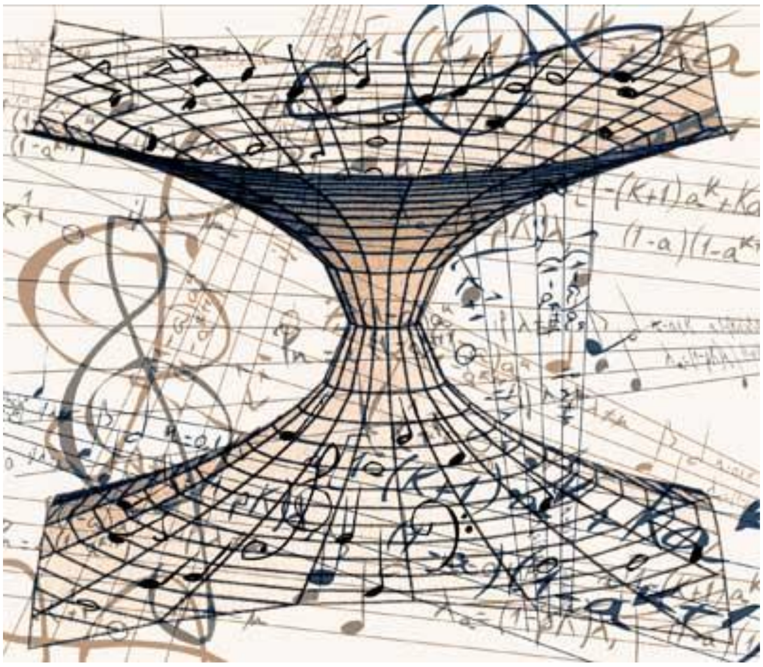
Música i matemàtiques:

Com sona la successió de Fibonacci?



INS Pere Ribot

Carla Gómez Cano

2n.baxt.B

15 de Gener del 2016

Tutoritzat per Eduard Bosch

Agraïments

En primer lloc voldria donar-li les gràcies a la Paz González per parlar-nos del programa Argó i fer tots els tràmits per poder participar. A l'Eduard Gallego, tutor d'aquest programa, per ajudar-nos establir un primer contacte amb el tema d'aquest treball i donar-nos idees de com seguir.

També donar gràcies al professor de música Josep Lluís Zaragozà per donar-me alternatives a la música moderna occidental i parlar-me de la música estocàstica. Al meu professor de baix Kiko Ujaque per parlar-me de músics que treballen amb sèries i algoritmes i al meu professor de bateria Miki Grau per ajudar-me amb la música moderna occidental, el dodecafonisme i donar-me idees per fer la part pràctica.

En aquest apartat també m'agradaria donar-li les gràcies als meus pares, Encarna Cano i Xavier Gómez per motivar-me a seguir endavant tot i les dificultats que he tingut, i a la Carla Sobrerroca per els seus comentaris quan més els necessitava.

Finalment agrair la seva col·laboració al Manuel Cuadrado, primer tutor del treball de recerca, que em va ensenyar a utilitzar el programa wxMaxima i ens va acompanyar a totes les reunions del projecte Argó, i a l'Eduard Bosch, segon tutor d'aquest treball de recerca, per corregir-me el treball i ajudar-me en tot el que ha pogut.

Índex

1. Introducció

Aquest treball s'ha realitzat durant el curs 2015/2016 a l'IES Pere Ribot de Vilassar de Mar juntament amb l'assessorament del programa Argó on participa la Universitat Autònoma de Barcelona.

1.1. Tria del treball

Des de ben petita m'ha agradat la música i tant sols amb dos anys vaig tenir el meu primer contacte amb un instrument musical. A l'acabar l'ESO, quan va arribar el moment de triar quin batxillerat volia estudiar, tenia clar que em decantaria pel científic ja que les assignatures de ciència són les que més m'agraden i no volia tancar les meves oportunitats futures a tenir una feina de caràcter artístic. De totes maneres no vaig deixar de rebre classes musicals fora del centre i tot i que vaig triar un itinerari científic ja portava temps pensant com podia fer un treball de recerca que relacionés la música amb alguna assignatura del meu batxillerat.

A principis de primer de batxillerat ens van parlar del programa Argó, un programa organitzat per la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), que proposava treballs de recerca guiats per un professor d'aquesta universitat. Vaig estar mirant la llista de treballs proposats fins que vaig trobar un que em va cridar molt l'atenció, el seu títol era: "Música i matemàtiques: Com sona la successió de Fibonacci?". Al principi quan vaig llegir la descripció em va semblar un tema força estrany i vaig començar a buscar informació per saber una mica més. Tot el que vaig trobar em va semblar molt interessant i finalment em va convèncer definitivament per triar aquest tema com a treball de recerca.

1.2. Objectius

Els objectius que m'he proposat assolir són:

- Definir què és la successió de Fibonacci, explicar algunes propietats i mostrar les relacions que té amb la natura i sobretot amb la música.
- Explicar què és el nombre d'or, mostrar algunes de les seves propietats i relacionar-lo amb la natura i l'art.
- Explicar quins criteris s'han de seguir per composar una melodia musical amb sentit i un acompanyament que li correspongui.

- Fer composicions musicals que segueixin tant les diferents tècniques de composició com la successió de Fibonacci i el nombre d'or.

1.3. Plantejament del treball

Aquest treball està dividit en 4 parts:

- La introducció on he explicat perquè, com i quan he fet aquest treball, juntament amb els objectius proposats.
- La part teòrica dividida en dos blocs, un introduint els conceptes matemàtics i l'altre els conceptes musicals. Els dos blocs estan relacionats amb la part pràctica.
- La part pràctica on he fet diverses melodies que segueixen tant les tècniques de composició musical com la successió de Fibonacci i la raó d'or.
- Conclusions on explico si he complert els objectius del treball i valoro el seu desenvolupament.

2. Part teòrica

Aquesta part del treball està dividida en dos blocs. En el primer he explicat tots els conceptes que tenen a veure amb les matemàtiques i en el segon he definit els termes musicals relacionats amb aquest treball.

2.1. Conceptes matemàtics

2.1.1. Successió

Una successió és un conjunt ordenat d’objectes matemàtics, generalment de nombres reals, anomenats termes de la successió. En totes les successions hi ha un primer terme però no un últim.

En altres paraules, podem dir que una successió de nombres reals és una funció que assigna a cada nombre natural *n* un nombre real *an*:

$$\begin{array}{cccc} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & 1 & \mapsto & a_1 \\ & 2 & \mapsto & a_2 \\ & 3 & \mapsto & a_3 \\ & & \cdots & \\ & n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Figura 1: Successió de nombres reals

https://dl.dropboxusercontent.com/u/60679769/MATES1BAT/limits_index.html

2.1.1.1.Terme general d’una successió

S'anomena terme general d'una successió, i s'escriu a_n, al terme que ocupa un lloc qualsevol *n* sense especificar. En algunes successions el terme general es pot calcular mitjançant una expressió algebraica depenent de *n*. Però en altres no és possible i el que es fa servir és una relació de recurrència que permet calcular el terme a_n en funció dels termes anteriors $(a_n-1, a_n-2, \ldots)$.

2.1.1.2. Classificació de les successions

Les característiques que presenten les diferents successions ens permeten classificar-les en diferents tipus:

- Successions finites o infinites: Una successió és finita si podem determinar el seu últim terme. En canvi, si no podem serà infinita.
- Successions constants: Una successió és constant si tots els seus termes valen un mateix valor *K*, és a dir, valen el mateix nombre real.
  Exemple:
  $$a_n = (1)^n = 1, 1, 1, 1, \dots$$
- Successions alternades: Són les successions que alternen valors de signe oposat.
  Exemple:
  $$a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots$$

2.1.1.3. Fita d'una successió

Podem trobar tres tipus de successions fitades:

Una successió està fitada superiorment si existeix un nombre real *K* superior a tots els termes de la successió. Aquest nombre *K* s'anomena fita superior.

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R} \,; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq K}$$

Figura 2: Fita superior

https://dl.dropboxusercontent.com/u/60679769/MATES1BAT/limits_index.html

D'altra banda una successió està fitada inferiorment si existeix un nombre real *K* inferior a tots els termes de la successió. Aquest nombre *K* s'anomena fita inferior.

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R} \,; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq K}$$

Figura 3: Fita inferior

https://dl.dropboxusercontent.com/u/60679769/MATES1BAT/limits_index.html

Podem dir que una successió està fitada si té tant fita superior com inferior.

2.1.1.4. Monotonia d'una successió

Una successió és creixent si cada terme és major o igual que l'anterior:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$$

Figura 4: Successió creixent

https://dl.dropboxusercontent.com/u/60679769/MATES1BAT/limits_index.html

Si totes les desigualtats són estrictes, aleshores la successió s'anomena estrictament creixent:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

Figura 5: Successió estrictament creixent

https://dl.dropboxusercontent.com/u/60679769/MATES1BAT/limits_index.html

D'altra banda una successió és decreixent si cada terme és menor o igual que l'anterior:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$$

Figura 6: Successió decreixent

https://dl.dropboxusercontent.com/u/60679769/MATES1BAT/limits_index.html

Serà estrictament decreixent si les desigualtats són estrictes:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

Figura 7: Successió estrictament decreixent

https://dl.dropboxusercontent.com/u/60679769/MATES1BAT/limits_index.html

En tots aquests casos es diu que la successió és monòtona.

2.1.2. Successió de Fibonacci

La successió de Fibonacci és una successió formada pels següents nombres reals:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \ldots$$

La successió comença amb els termes 0 i 1, i a partir d'aquests, cada terme és la suma dels dos anteriors. No és possible definir aquesta successió amb una expressió algebraica, a causa d'això s'utilitza la relació de recurrència següent:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 2 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall_n > 2 \end{cases}$$

2.1.2.1. Història

Molt abans de donar-se a conèixer a l'occident, aquesta successió ja estava descrita a les matemàtiques de l'Índia i s'atribueix el seu desenvolupament a Pingala, un matemàtic indi que s'estima que va viure als voltants del segle IV a.C.

Tot i això, aquesta successió va ser descrita i donada a conèixer a l'occident per el gran matemàtic europeu de l'edat mitjana, Leonardo de Pisa (1170-1250). Leonardo de Pisa era fill de Bonaccio i és per això que es va fer conèixer com a Fibonacci. En el seu llibre "Liber Abaci" (1202) va introduir l'ús dels nombres àrabs que ara fem servir i va plantejar el famós problema dels conills que va donar lloc a la successió que porta el seu nom. Aquest problema és el següent:

"Un parell de conills (que acaben de néixer) queden confinats en un espai tancat. Aquest parell, i cada parell següent, té un nou parell de conills cada mes, començant al segon mes de vida. Quants parells hi haurà al cap d'1, 2, 3,... mesos suposant que la mortalitat és nul·la?" [1]

[1] FIBONACCI, Leonardo. Liber Abaci, 1202.

Número de mes	Parelles de conills
Començament del mes 1	1 parella en total
Fi del mes 1	1+0=1 parella en total
Fi del mes 2	1+1= 2 parelles en total
Fi del mes 3	2+1= 3 parelles en total
Fi del mes 4	3+2= 5 parelles en total
Fi del mes 5	5+3=8 parelles en total
Fi del mes 6	8+5= 13 parelles en total

Així és com Fibonacci va presentar aquesta successió al seu llibre. Posteriorment, Édouard Lucas va descobrir moltes propietats sobre aquesta successió i va ser el responsable d'anomenar-la com avui dia la coneixem. Johannes Kepler, conegut per formular les lleis sobre el moviment dels planetes, també va descriure els números de Fibonacci. Al 1753 el matemàtic escocès Robert Simson va descobrir que la relació entre dos números de Fibonacci successius s'apropa al nombre d'or, al qual faré referència més tard.

2.1.2.2. Propietats de la successió

- El quocient entre un terme i el immediatament anterior a ell varia constantment, però s'estabilitza en el nombre d'or. És a dir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$$

  Aquesta és la relació més important entre la successió de Fibonacci i el nombre d'or.

- Qualsevol número natural es pot escriure mitjançant la suma limitada d'alguns termes de la successió de Fibonacci. Cadascun d'ells diferent als altres.

  Exemple: $17 = 13 + 3 + 1$ i $65 = 55 + 8 + 2$

- A la successió de Fibonacci tan sols un terme de cada tres és parell, un de cada quatre és múltiple de tres, un de cada cinc és múltiple de 5, etc. Això es pot generalitzar de manera que aquesta successió és periòdica en les congruències de mòdul *m* per a qualsevol *m*.

- Cada nombre de Fibonacci és la mitjana del terme que es troba dos llocs abans i el terme que es troba un lloc desprès. És a dir:

$$\frac{f_{n-2}+f_{n+1}}{2}=f_n$$

<u>Demostració:</u>

$$\frac{f_{n-2}+f_{n+1}}{2}=\frac{\overbrace{f_{n-2}+f_{n-1}}^{f_n}+f_n}{2}=\frac{f_n+f_n}{2}=\frac{2f_n}{2}=f_n$$

- El màxim comú divisor de dos nombres de Fibonacci és un altre nombre d'aquesta successió.
- El nombres de Fibonacci apareixen al sumar les diagonals del triangle de Pascal:

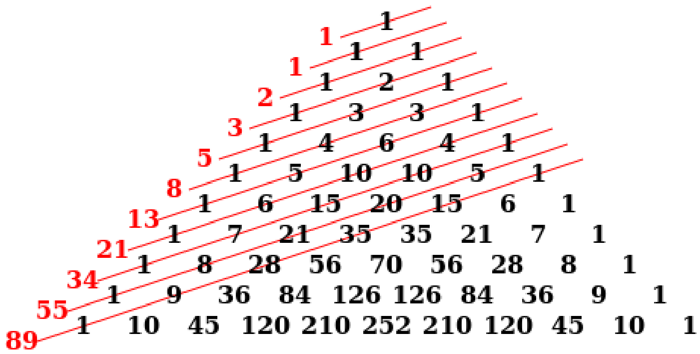


Figura 8: Triangle de Pascal amb nombres de Fibonacci

https://madsciencetech.wordpress.com/2014/08/23/things-to-know-about-fibonacci-and-his-numbers/

- La suma de deu nombres de Fibonacci consecutius sempre serà onze vegades superior al setè nombre dels deu consecutius escollits.
  Exemple:

$$1+2+3+5+8+13+21+34+55+89=231$$

  El 21 és el setè terme dels deu nombres consecutius escollits.

$$21\times 11=231$$

- L'últim dígit de cada número es repeteix periòdicament cada seixanta números. Els dos últims, cada 300, i a partir d'aquí, es repeteixen cada $15\times 10^{n-1}$ números.

2.1.3. Successió de Fibonacci modular

La successió de Fibonacci té infinits termes i cada vegada aquests termes es fan més grans. Com resulta molt difícil treballar amb nombres grans aquesta successió s'ha de modular per obtenir nombres menors. Per fer-ho considerem la successió $\{R_n(m)\}_{n\geq 0}$ per a cada nombre natural m on $R_n(m)$ és el residu que s'obté quan dividim F_n entre m.

2.1.3.1. Propietats de la successió modulada

- Els termes de $\{R_n(m)\}_{n\geq 0}$ sempre estaran entre 0 i $m-1$.
- El valor de $R_n(m)$ es pot obtenir fent el residu de $R_{n-2}(m)+R_{n-1}(m)$ quan es divideix aquesta suma entre m. És a dir:

  $$R_n(m) = \left(R_{n-2}(m) + R_{n-1}(m)\right) mod\ (m)$$

  Això fa que les successions de Fibonacci modular siguin molt simples de calcular.

<u>Demostració:</u>

$$f_n = q_n \cdot m + R_n \ \ on \ \ 0 \leq R_n < m \ \ i \ \ q_n \text{ és el quocient de la divisió } \frac{f_n}{m}$$

$$f_{\mathrm{n-1}} = \mathrm{q_{n-1}} \cdot m + R_{n-1} \ \ on \ \ 0 \leq R_{n-1} < m$$

$$f_{\mathrm{n-2}} = \mathrm{q_{n-2}} \cdot m + R_{n-2} \ \ on \ \ 0 \leq R_{n-1} < m$$

Volem veure que $R_{n-1} + R_{n-2} \cong R_n\ mod\ (m)$, o que equivalentment $\frac{(R_{n-1}+R_{n-2})}{m}$ té residu R_n.

Partim de:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Substituïm cada un dels termes per la seva expressió escrita anteriorment:

$$q_n \cdot m + R_n = q_{n-1} \cdot m + R_{n-1} + q_{n-2} \cdot m + R_{n-2}$$

$$q_n \cdot m + R_n = m(q_{n-1} + q_{n-2}) + (R_{n-1} + R_{n-2})$$

Si $(R_{n-1} + R_{n-2}) < m$ ja hem acabat perquè la descomposició és única.

Però si $(R_{n-1} + R_{n-2}) \geq m$ podem dir que $R_{n-1} + R_{n-2} = q \cdot m + R$ i queda que:

$$q_n \cdot m + R_n = m \cdot (q_{n-1} + q_{n-2} + q) + R \ \ on \ \ 0 < R < m$$

Ara per unicitat de descomposició tenim que $R_n = R$, que és el que volíem demostrar.

- La successió de Fibonacci modulada és periòdica en les congruències de mòdul *m* per a qualsevol *m*, és a dir:

$$R_n(m) \ és \ periòdica \ \forall m \in \mathbb{N}$$

<u>Demostració:</u>

$0 \leq R_i < m$ on R_i té un nombre finit de termes que pot prendre. Donat això tard o d'hora es repetirà una parella de R_i consecutius. Posem per cas que $R_i, R_{i+1} = R_j, R_{j+1}$ és la primera parella que es repeteix, aleshores $R_{i+2} = R_{j+2}$ ja que $R_{i+2} = R_i + R_{i+1} \ (mod \ m)$ i $R_{j+2} = R_j + R_{j+1} \ (mod \ m)$. Per tant, ja tenim el període.

<u>Exemples:</u>

1. $m = 1$. La successió és 0, 0, 0,...
2. $m = 2$. La successió és 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1,... (es va repetint).
3. $m = 3$. La successió és 0, 1, 1, 2, 3, 1,... (aquest cicle es va repetint).
4. $m = 4$. La successió és 0, 1, 1, 2, 3, 1,... (aquest cicle es va repetint).

2.1.4. La raó d'or

2.1.4.1. Definició

Quan fem el quadrat d'un nombre x pot passar que x^2 sigui menor que x, que x^2 sigui major que x o que x^2 sigui igual a x. Aquest darrer cas només es dona quan x és igual a 0 o a 1.

<u>Exemples:</u>
$3^2 = 9$ on $9>3$
$(3/2)^2 = 9/4$ on $9/4<3/2$
$0^2=0$ on $0=0$

Per representar la raó d'or es fa servir la lletra grega φ (phi en minúscula) o Φ (Phi en majúscula) en honor a l'escultor grec Phidias. Aquesta raó serà aquell nombre Φ tal que el seu quadrat és exactament una unitat més gran que Φ. És a dir, un nombre Φ que satisfà la igualtat:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Si resolem aquesta equació podem observar que té dues solucions: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, però només considerem que és la raó d'or la solució positiva. Per tant direm que la raó d'or és:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339$$

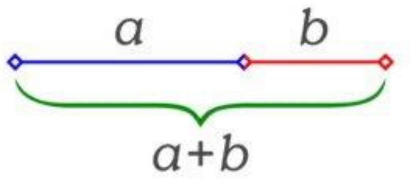
2.1.4.2. Història del nombre d'or

Els primers indicis de la raó d'or s'han trobat a les proporcions de diverses esteles de Babilònia i Assíria aproximadament de l'any 2000 a.C, però molts experts asseguren que aquestes proporcions no van estar fetes expressament seguint el nombre d'or i que la relació amb aquest nombre ha estat pura casualitat.

El primer en fer un estudi formal d'aquest nombre va ser Euclides (300-265 a.C.). Aquest matemàtic i geòmetra grec va determinar el segment d'or dient que:

"Es diu que un segment ha estat tallat en extrema i mitja raó quan el segment sencer és a al segment major com el segment major és al segment petit."[2]

Això es pot interpretar de la següent manera:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Figura 9: Segment d'or

http://www.socionomics.net/2010/03/socionomics-and-fibonacci-golden-ratio-governs-life-beauty-and-the-universe-2/

Euclides també va demostrar que aquest nombre no pot ser el quocient entre dos nombres sencers, és a dir, és un nombre irracional. Això es pot explicar perquè si $\Phi = \frac{p}{q}$, amb p i q nombres enters sense factors comuns tenim que:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p}{q} + 1$$

Aleshores $p(p-q) = q^2$ i per no tenir factors en comú ha de ser per força $p = 1^1$. Per altra banda també tenim la igualtat $p^2 = q(p+q)$ i llavors $q = 1$, cosa que és una contradicció ja que $\Phi \neq 1$.

Al 1509 el matemàtic i teòleg Luca Pacioli va publicar "De divine proportione" (La divina proporció), on explicava raons per les quals el nombre d'or havia de considerar-se com un número diví.

El primer ús de l'adjectiu d'or per referir-se a aquest número ho va fer el matemàtic Martin Ohm, germà del físic Georg Simon Ohm, a la segona edició del seu llibre "Die reine elementar matematik" (Las matemàtiques pures i elementals). Va fer referència a aquest terme amb la següent frase:

"Un també acostuma a anomenar a aquesta divisió entre una línia arbitrària en dos parts com aquestes la secció daurada." [3]

---

[2] EUCLIDES. Els elements, 300 a.C.
[3] OHM, Martin. Die reine elementar matematik, 1834.

Tot i que la manera d'escriure aquest adjectiu suggereix que aquest terme ja era d'ús comú quan va escriure aquest llibre, el fet de que no l'utilitzés a la primera edició fa pensar que va guanyar popularitat al voltant de l'any 1830. A l'any 1900 es va començar a utilitzar el símbol Φ o φ per representar el nombre d'or, però anteriorment el símbol que es feia servir era la lletra grega τ (*τομή)* que significa tall o secció.

2.1.4.3. Propietats i representacions

Propietats aritmètiques

- Φ és l'únic nombre real positiu que compleix la següent equació:
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

- També posseeix les següents propietats:
$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$
$$\Phi^3 = \frac{\Phi + 1}{\Phi - 1}$$

- Les potències del nombre d'or es poden expressar en funció d'una suma de potències de graus inferiors del mateix nombre, és a dir, podem establir una successió recurrent de potències.
El cas més simple és: $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$; on n és un nombre enter. A la fórmula recurrent és possible que apareguin potències negatives de φ. Les potències negatives de φ corresponen a una potència positiva del seu invers, la secció d'or. La secció d'or és la inversa del nombre d'or i es representa de la següent manera:
$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Representació mitjançant fraccions continues

Com $\Phi^2 = \Phi + 1$ podem deduir que $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. Aleshores es pot establir la següent relació amb fraccions:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Representació mitjançant arrels continues

Com que $\Phi^2 = 1 + \Phi$ podem dir que $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$. Aleshores es pot establir la següent relació amb arrels:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

Propietats geomètriques

El nombre d'or i la secció d'or estan presents en tots els objectes geomètrics regulars o semiregulars que tinguin simetria pentagonal, que siguin pentàgons o en els quals aparegui d'alguna manera l'arrel quadrada de cinc. Algunes de les figures geomètriques on trobem relacions amb el nombre d'or són les següents:

- Relacions entre les parts del pentàgon.
- Relacions entre les parts del pentàgon estrellat.
- Relacions entre les parts del decàgon.
- Relacions entre les parts del dodecàedre i el icosàedre.

<u>El rectangle d'or d'Euclides</u>

Euclides al seu llibre "Els elements", va descriure com formar un rectangle que seguís la raó d'or.
Primer s'ha de dibuixar un quadrat i marcar el punt mig d'un dels seus costats. Desprès unim el punt mig amb un dels vèrtexs del costat oposat i afegim

aquesta distància des del centre del costat inicial. D'aquesta manera obtenim el costat gran del rectangle. Aquest costat compleix les propietats del segment d'or que el mateix Euclides va descriure. A partir d'aquest rectangle podem determinar la raó d'or:

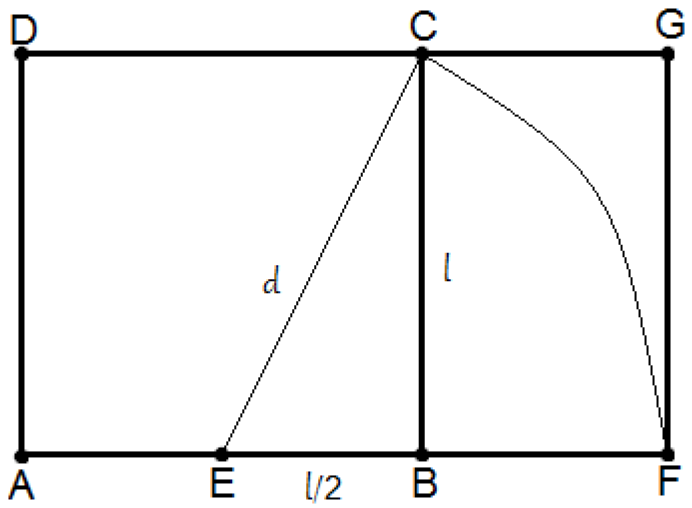


Figura 10: Dibuix d'un rectangle d'or

Fet amb el programa "Paint"

Tenim que $AF = \frac{l}{2} + d$ i que $AB = l$, després de simplificar podem obtenir l'expressió següent:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{\frac{l}{2} + d}{l} = \frac{\frac{l}{2} + \sqrt{l^2 + (l/2)^2}}{l} = \Phi$$

Si suposem que és un rectangle amb $l = 2$ i substituïm les lletres per nombres obtenim la raó d'or.

$$\frac{AF}{AB} = \frac{\frac{1}{2} + d}{1} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{1^2 + (1/2)^2}}{1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Si encaixem rectangles d'or d'una manera determinada podem obtenir una espiral anomenada espiral d'or.

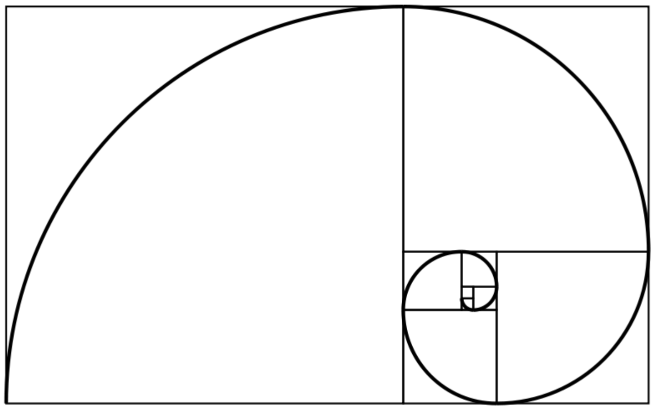


Figura 11: Espiral d’or

http://matematizaturealidad.blogspot.com.es/2014/06/la-divina-proporcion-girasoles-ciclones.html

Tanmateix si unim quadrats que compleixin que els seus costats vagin augmentant seguint la successió de Fibonacci obtenim l’espiral de Fibonacci que s’aproxima molt a l’espiral d’or.

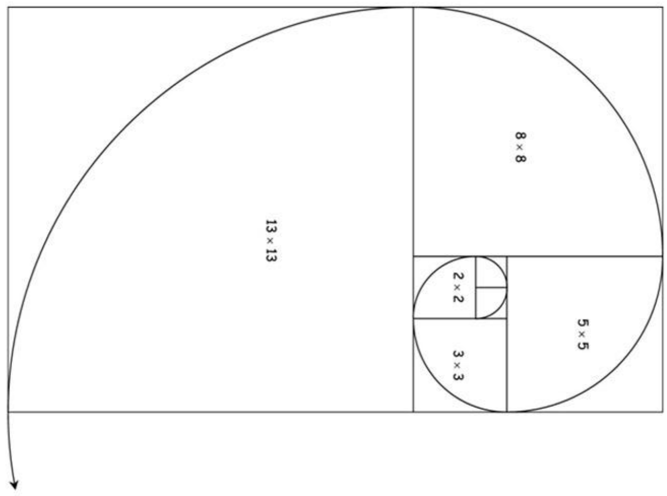


Figura 12: Espiral de Fibonacci

https://dsigngrafico.wordpress.com/tag/design-grafico/

Si dividim el costat d’un quadrat entre el costat del quadrat immediatament menor a aquest, obtenim una aproximació a la raó d’or.

2.1.5. Successió de Fibonacci i raó d'or a la natura

2.1.5.1. En plantes i animals

L'espiral logarítmica ha captivat, per la seva bellesa i propietats, l'atenció de matemàtics, artistes i naturalistes. Aquesta espiral es pot trobar en el creixement de moltes formes vegetals, tant en flors com en fruits, i animals. L'exemple més visualment representatiu és la closca dels animals del gènere nautilus.

Figura 13: Closca d'un nautilus

http://www.jillcaruso.com/

Com hem vist abans, els models de reproducció de conills segueixen els nombres de la successió de Fibonacci, tanmateix, aquesta successió es troba a múltiples configuracions biològiques. La distribució de les branques dels arbres, la distribució de les fulles a una tija, els fruits de la pinya tropical o les flors de les carxofes tenen relació amb els nombres de Fibonacci i la raó d'or. El motiu per el qual es dona aquesta disposició és per obtenir el millor empaquetat en el mínim espai, això s'anomena economia de la natura.
A la imatge següent podem veure com fulles de diferents arbres tenen relacions amb el nombre d'or:

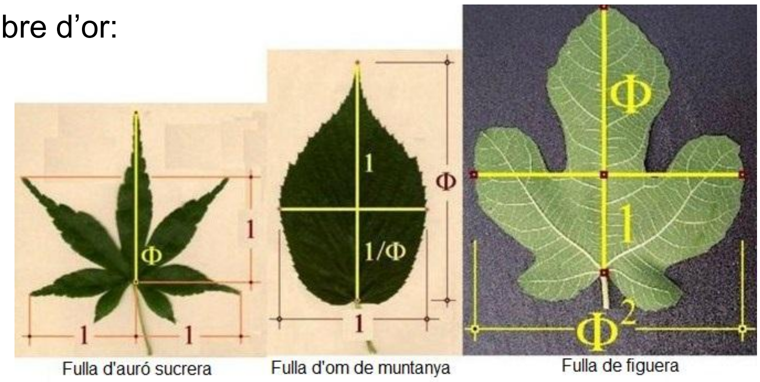


Figura 14: Fulles de diferents arbres que contenen la raó d'or.

http://tercerovisual2013.blogspot.com.es/2013/05/algunos-ejemplos-de-proporcion-aurea.html?view=mosaic&m=1

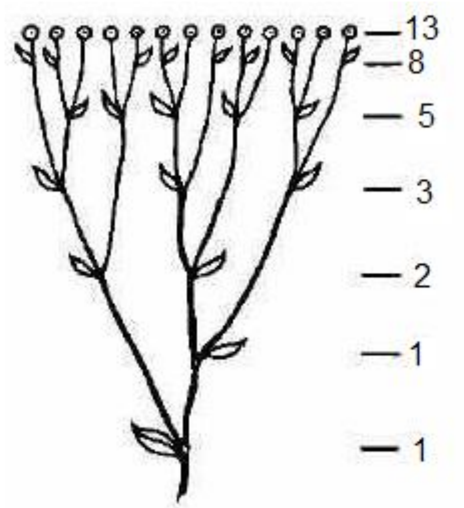


Figura 15: Creixement d'un arbre amb els nombres de Fibonacci

http://www.geohikers.es/matematicas-en-la-naturaleza-ii-y-sin-embargo-el-universo-tambien-es-euclidiano/

Genealogia de les abelles

El nombre de descendents de cada generació d'una abella mascle o abellot, ens porta a la successió de Fibonacci, i per tant, al nombre d'or. Segons les investigacions realitzades, un cop inseminada l'abella reina per un abellot (d'un altre eixam) es queda al seu rusc i no surt més, dedicant-se a posar ous per donar origen a abelles obreres, quan els ous els fecunda ella mateixa, o a abellots quan són fecundats per altres. Si observem l'arbre genealògic d'una abella podem veure com el nombre d'abelles a cada generació és un dels termes de la successió de Fibonacci.

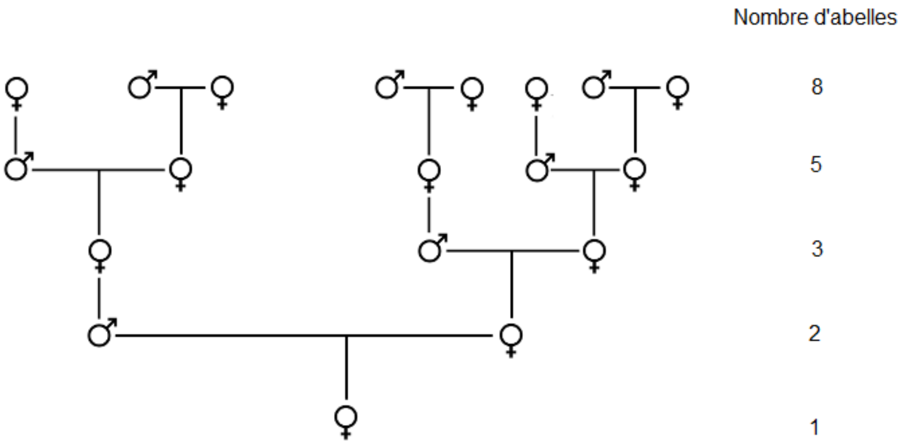


Figura 16: Genealogia de les abelles

https://ztfnews.wordpress.com/2013/11/06/generaciones-de-abejas-y-numeros-de-fibonacci/

2.1.5.2. En els humans

Leonardo Da Vinci va realitzar el dibuix de l'home de Vitruvi per il·lustrar el llibre de la "Divina Proportione" del matemàtic Luca Paoli l'any 1509. En aquest llibre, es descriuen quines han de ser les proporcions de les construccions artístiques, en particular, de l'home perfecte. La relació entre l'alçada del home i la distància entre el melic i la mà és el nombre d'or. Així mateix la relació entre la distància del nas a la part superior del cap i la distància entre la barbeta i el nas, i la relació entre la longitud i l'amplada del cap, també donen aquest nombre.

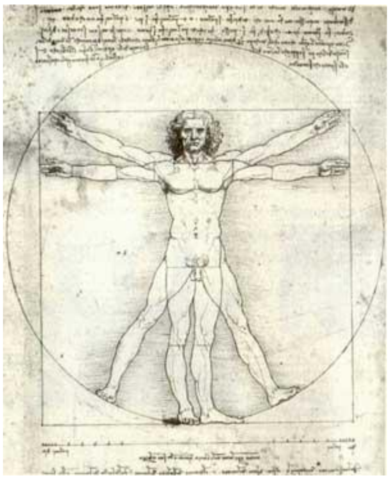


Figura 17: Home de vitruvi de Leonardo Da Vinci.

http://fisiomajadahonda.blogspot.com.es/p/osteopatia.html

Altres parts de l'home on podem trobar el nombre d'or són les falanges dels dits, als braços i a les cames, a les orelles i a la relació entre les dents i els llavis a la boca.

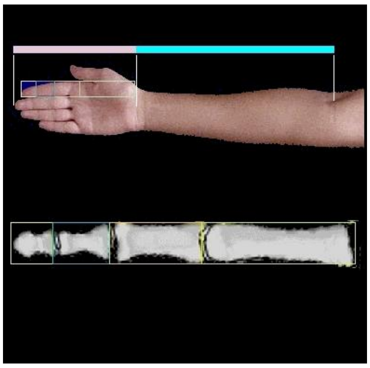


Figura 18: Nombre d'or a les falanges i al braç

https://www.pinterest.com/paulacleal7/proporci%C3%B3n-aureo/

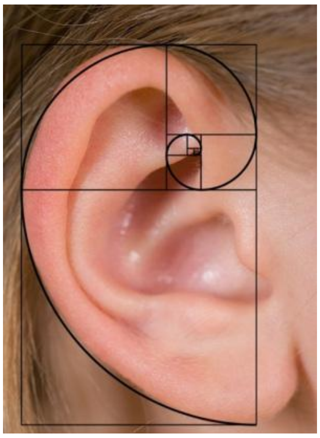


Figura 19: A les orelles podem trobar l'espiral logarítmica, i en conseqüència la raó d'or i la successió de Fibonacci.

https://hrexach.wordpress.com/2014/12/11/the-golden-ratio-fibonacci-sequence/

2.1.6. Successió de Fibonacci i raó d'or a l'arquitectura

El nombre d'or ha estat utilitzat des de la època dels egipcis per a la construcció d'edificis. Però els grecs són els que van explotar al màxim aquest nombre utilitzant-lo gairebé a totes les facetes de l'art.
El primer ús conegut del nombre d'or a l'arquitectura és la piràmide de Keops, que data de l'any 2600 a.C.

Figura 20: Piràmide de Keops, Egipte

http://spain.memphistours.com/Egipto/sobre-egipto/atracciones-en-el-cairo/wiki/la-piramide-de-keops

Aquesta piràmide té cada una de les seves cares formades per dos mitjos triangles que compleixen la raó d'or.

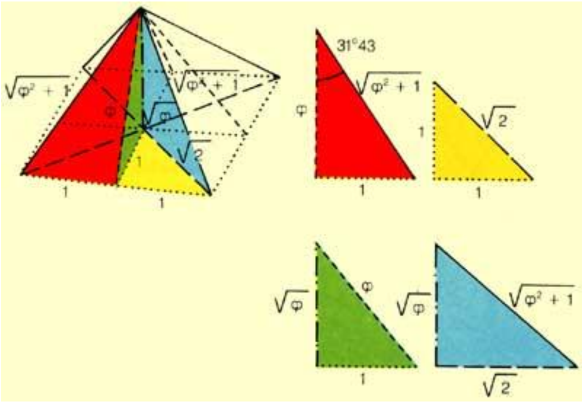


Figura 21: Raó d'or a la piràmide de Keops

http://marualbini.blogspot.com.es/p/matematica-en-el-mundo.html

Més tard, entre els anys 447 a.C i 432 a.C, es va construir el Partenó d'Atenes on es poden trobar moltes raons d'or. El Partenó en general és un rectangle d'or i dins seu es poden trobar moltes altres relacions.

A la figura següent es pot comprovar que $\frac{AB}{CD} = \Phi$, $\frac{AC}{AD} = \Phi$ i que $\frac{CD}{CA} = \Phi$. Encara que hi ha més quocients que també donen el número d'or.

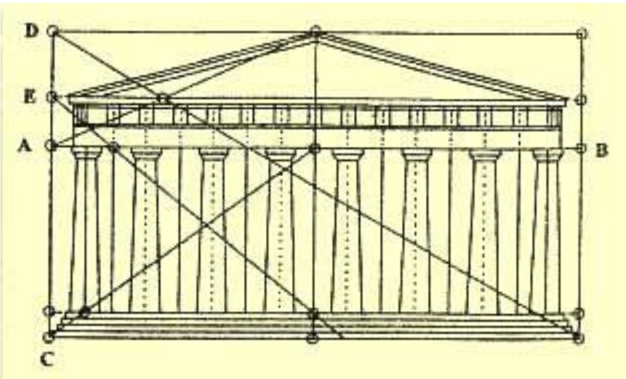


Figura 22: Partenó com a rectangle d'or

http://veromg87.blogspot.com.es/

2.1.7. Successió de Fibonacci i raó d'or a la pintura

Luca Pacioli (1445-1517) va escriure un tractat sobre la proporció divina que va influenciar a molts artistes tant d'aquella època com posteriors. Una de les obres més importants on podem trobar el nombre d'or és la Mona Lisa de Leonardo Da Vinci. En aquest quadre el cap de la Mona Lisa és un rectangle d'or i la disposició de cada element de la seva cara esta feta perquè compleixi aquest nombre.

El pintor espanyol Diego Velázquez també va utilitzar la raó d'or en alguns dels seus quadres. Un exemple és la seva famosa obra "Las meninas", on el rectangle que envolta totes les figures és d'or.

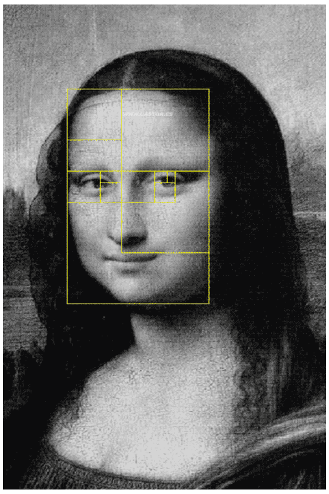


Figura 23: Mona Lisa de Leonardo Da Vinci

http://lolujl.blogspot.com.es/2010/11/el-numero-aureo.html

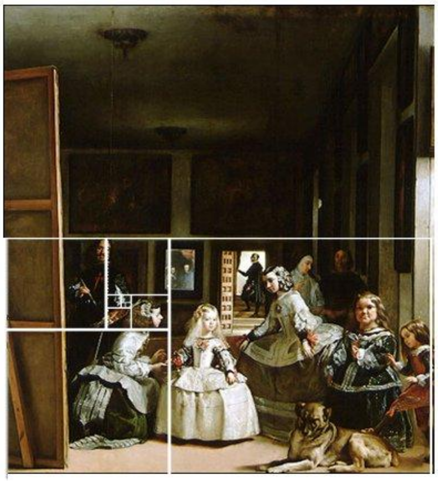


Figura 24: Las meninas de Diego Velázquez

http://mitocondriacientifica.blogspot.com.es/2015/06/la-imagen-sabatina-xxxii.html

2.1.8. Successió de Fibonacci i raó d'or a la vida quotidiana

El nombre d'or i la successió de Fibonacci no només es poden trobar a la natura o en antigues construccions, diàriament utilitzem objectes que també estan molt relacionats. La majoria de targetes de crèdit i carnets tenen la proporció d'un rectangle daurat. També ho podem trobar en els paquets de cigarrets, en la construcció de mobles, finestres, llits, etc.
A les imatges següents podem veure dos objectes quotidians que són rectangles d'or.

Figura 25: DNI (Document nacional d'identitat)

http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/recaujon.htm

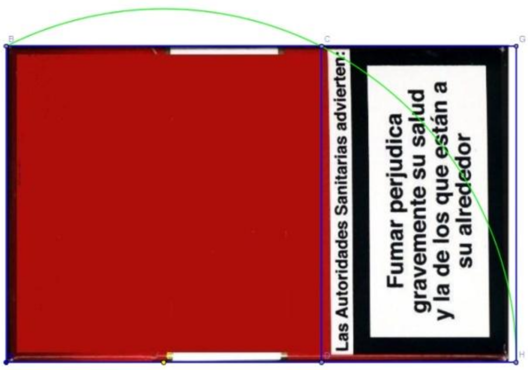


Figura 26: Paquet de tabac

http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/recaudam.htm

2.2. Conceptes musicals

2.2.1. Música

La música és l'art de la creació, manipulació i combinació dels sons, produïts per veus humanes o per instruments, amb l'objectiu de trobar la bellesa formal, expressar emocions i produir efectes en el receptor amb missatges dotats d'unitat, continuïtat i coherència.

Les manifestacions musicals sovint segueixen unes normes que tenen validesa dins d'un context cultural concret, tot i això, hi ha hagut molts autors com el poeta Samuel Rogers (1763-1855) i el compositor Carl Maria von Weber (1786-1826) que han dit que la música és un llenguatge universal. Les normes que habitualment s'han de seguir són la melodia, el ritme, el timbre i l'harmonia (música occidental):

- Melodia: És una successió de notes organitzades, combinant altures i ritmes, que es percep com una sola entitat. Es desenvolupa com a seqüència lineal, és a dir, al llarg del temps, i té una identitat i significat propi dins d'un entorn sonor en particular.
- Ritme: És el paràmetre que determina la durada del so i del silenci entre una nota i una altra.
- Timbre: És una qualitat que ens permet distingir dos o més sons que tinguin el mateix to, durada i intensitat, és a dir, diferenciar la mateixa nota tocada per dos o més instruments diferents.
- Harmonia: És tot el que es relaciona amb els sons simultanis (acords). L'harmonia ha de correspondre's amb la melodia per tal de que la música soni "agradable" i molts cops fa la funció d'acompanyament d'aquesta.

Per transmetre la música del músic l'oient es requereixen dues etapes creatives: la composició i la interpretació. La composició és el procés mitjançant el qual es crea una obra musical, i la interpretació és l'acció de fer o produir música amb la veu, instruments o altres objectes capaços de produir sons musicals. Hi ha alguns casos, com en la improvisació, que les dues fases s'uneixen en una ja que el músic interpreta la música que està creant en aquell mateix moment. Un estil de música on s'utilitza molt la improvisació és el jazz.

2.2.2. Tècniques de composició musical

Hi ha diverses tècniques de composició musical, però totes elles depenen tant de la finalitat per la qual es fa aquesta música, com de la manipulació dels diferents paràmetres que la conformen.

Les primeres tècniques que es van utilitzar estaven relaciones amb les lleis del ritme i la melodia. A Europa, primer es va desenvolupar la modalitat i posteriorment la tonalitat. Més tard el contrapunt, tècnica que consisteix en combinar diverses melodies que es toquen simultàniament, i l'harmonia van començar a guanyar importància. Tot i que a partir del segle XVII els compositors mostraren interès per definir amb quins timbres i instruments imaginaven les seves músiques, la instrumentació i sobretot l'orquestració, com a tècniques vinculades a la creació musical, no es van desenvolupar fins al segle XIX.

Al llarg del segle XX el material musical ha estat cada vegada més ampli i divers, i les fronteres entre allò musical i allò no musical han anat variant. Al mateix temps algunes tècniques, en especial l'electrònica, han desenvolupat nous instruments que han enriquit enormement el ventall tímbric i han modificat el concepte d'instrument.

Algunes d'aquestes noves tècniques són l'atonalitat, la música aleatòria o música estocàstica, la música algorítmica, la música minimalista on es repeteixen motius molt concrets i la microtonalitat on la música es divideix en parts més petites que els semitons.

2.2.3. Música moderna occidental

Actualment hi ha molts mètodes diferents per composar música, però a la societat europea el que més s'utilitza és la música tonal que utilitza diferents escales, modalitats, ritmes i timbres; tot això acompanyat d'una harmonia que concordi amb aquests elements.

2.2.3.1. Escales

Una escala és una successió de sons per graus conjunts en forma ascendent (do, re, mi, fa, sol, la, si) o descendent (si, la, sol, fa, mi, re, do). Les escales que s'utilitzen més freqüentment són les diatòniques que estan formades per intervals[4] de segona consecutius. Els intervals de segona major estan separats per un to (do-re), mentre que els de segona menor per un semitò (mi-fa). Les dos variants més importants d'aquesta escala són l'escala diatònica major i l'escala diatònica menor.
L'escala diatònica major consta, per ordre, dels següents tons i semitons: T-T-st-T-T-T-st.
Si considerem l'escala cromàtica, que es desplaça de semitò en semitò i on hi ha les 12 notes que s'utilitzen a la música occidental, i apliquem aquesta fórmula obtenim l'escala major.

Do-Do#-Re-Re#-Mi-Fa-Fa#-Sol-Sol#-La-La#-Si (Escala cromàtica des de Do)

Do (T) Re (T) Mi (st) Fa (T) Sol (T) La (T) Si (st) Do (Escala de Do major)

A l'escala de Do major la nota tònica és Do ja que és la nota principal i jeràrquicament més important.

A les notes es poden aplicar diversos tipus d'alteracions. El símbol "#" ens indica que una nota és un semitò més agut (sostinguda), el símbol "b" ens indica que és una nota un semitò més greu (bemoll) i el símbol ♮ és un becaire i anul·la qualsevol alteració. Totes les notes tenen sostingut i bemoll menys Mi i Si, que no tenen sostingut, i Fa i Do, que no tenen bemoll.

[4] Interval: És la diferència d'altura o freqüència que hi ha entre dues notes musicals. La seva expressió aritmètica és una proporció simple.

Totes les escales diatòniques majors tenen una relativa menor que s'anomena escala diatònica menor, escala eòlica o escala menor natural. Aquesta escala s'obté a partir de descendir un interval de tercera menor des de la tònica de l'escala diatònica major. És a dir, si estem a Do major hauríem de baixar un to i mig i arribaríem a la nota La (Do-Si-La). Per tant podem dir que l'escala relativa menor de Do major és La menor. Aquestes escales contindran les mateixes notes però en diferent ordre.

Do (T) Re (T) Mi (st) Fa (T) Sol (T) La (T) Si (st) Do (Escala de Do major)

La (T) Si (st) Do (T) Re (T) Mi (st) Fa (T) Sol (T) La (Escala de La menor)

A partir d'aquí podem dir que l'escala diatònica menor consta, per ordre, dels següents tons i semitons: T-st-T-T-st-T-T
Si s'escolta la mateixa cançó interpretada en major i en menor pot notar com l'escala major inspira alegria mentre que la menor dóna sensació de tristesa. Per demostrar-ho he posat a l'àudio 1 la melodia de la cançó popular Oh, Susanna original (escala major) i a l'àudio 2 la melodia de Oh, Susanna tocada amb l'escala menor.

Es pot notar com la segona, encara que es sent que és la mateixa cançó, li dona un to de tristesa i fins i tot tètric.

Tant l'àudio 1 com el 2 són la mateixa cançó, però com al 2 la melodia està interpretada amb l'escala menor sona més trista o fins i tot tètrica.

2.2.3.2. Tonalitat

Els conceptes tant de tonalitat com d'escala expressen el mateix conjunt de notes. La diferència és que el concepte d'escala es refereix al moviment conjunt (ascendent o descendent) dins d'aquestes notes, mentre que el de tonalitat es refereix a les notes en si que formen una obra sense importar l'ordre de presentació.

Funcions tonals

Les set notes o intervals d'una escala diatònica (major o menor) tenen una relació predeterminada entre elles. Depenent de la posició que ocupin a l'escala cada nota o acord d'una tonalitat rep un determinat nom o grau musical. El primer grau (I o tònica) és el més important, juntament amb el cinquè (V o dominant). La combinació dels dos acords és la base de la música tonal occidental i és capaç de crear efectes de tensió (dominant) i repòs (tònica). Aquests efectes ens poden ajudar a saber quan s'està acabant una cançó o quan necessitem més notes per acabar-la. Si acabem una cançó amb una nota que fa una funció de dominant, a l'oient li semblarà que la cançó no ha acabat i el deixarà en suspens ja que aquesta nota crea un efecte de tensió. En canvi si acabem una peça amb una nota que fa una funció de tònica crearà un efecte de repòs i l'oient s'adonarà de que ha acabat. Per exemple si agafem el principi de la Serenata nº13 en Sol major de Mozart, més coneguda com a petita serenata nocturna, i la tallem de manera que l'última nota sigui un Re (nota que fa la funció de dominant en la tonalitat de Sol major) notarem com ens quedem en suspens ja que el Re crea un efecte de tensió. Això es pot escoltar a l'àudio 3.

Tanmateix si acabem aquesta part en Sol (tònica) notem sensació de repòs. Es pot escoltar a l'àudio 4.

Si agafem l'escala diatònica de Do major com a exemple tenim que:

- I (primer grau): Tònica. Do
- II (segon grau): Supertònica. Re
- III (tercer grau): Mediant. Mi
- IV (quart grau): Subdominant. Fa
- V (cinquè grau): Dominant. Sol
- VI (Sisè grau): Superdominant o submediant. La
- VII (Setè grau): Sensible (en l'escala diatònica major) o subtònica (en l'escala diatònica menor). Si

Els graus 1r, 4t i 5è es consideren graus tonals perquè són els que d'una manera especial determinen la tonalitat, mentre que el 3r, i especialment el 6è i el 7è, es consideren graus modals perquè d'una manera més clara determinen el mode o modalitat que veurem a continuació.

2.2.3.3. Modes musicals

L'escala diatònica major comprèn set modes en si mateixa, sent ella un d'aquests set. Si agafem com a primera escala l'escala diatònica major, veiem que es poden formar sis escales més amb les seves notes: (Agafo com a exemple la tonalitat de Do major)

ESCALES	NOTES
1ª escala: Escala major diatònica:	DO RE MI FA SOL LA SI DO
2ª escala amb les mateixes notes:	RE MI FA SOL LA SI DO RE
3ª escala amb les mateixes notes:	MI FA SOL LA SI DO RE MI
4ª escala amb les mateixes notes:	FA SOL LA SI DO RE MI FA
5ª escala amb les mateixes notes:	SOL LA SI DO RE MI FA SOL
6ª escala amb les mateixes notes:	LA SI DO RE MI FA SOL LA
7ª escala amb les mateixes notes:	SI DO RE MI FA SOL LA SI

Aquestes altres sis escales que contenen les mateixes notes que l'escala diatònica major i la mateixa escala diatònica major, s'anomenen modes i cadascun té el seu nom.

- I Jònic: S'estructura en T T st T T T st
- II Dòric: S'estructura en T st T T T st T
- III Frigi: S'estructura en st T T T st T T
- IV Lidi: S'estructura en T T T st T T st
- V Mixolidi: S'estructura en T T st T T st T
- VI Eòlic o menor natural: S'estructura en T st T T st T T
- VII Locri: S'estructura en st T T st T T T

El sisè grau també es pot anomenar menor natural, això és degut a que el mode eòlic és igual a l'escala relativa menor de la tonalitat que estem tractant. Si mirem la seva estructuració en tons i semitons podem veure que és la mateixa que la de l'escala diatònica menor.

Com hem vist abans els modes estan compostos per escales que tenen les mateixes notes però en ordres diferents. Per diferenciar un mode de l'altre el que fem és donar importància a certes notes característiques de cada un. Els modes també són capaços de transmetre sensacions, i depèn de quin utilitzem ens pot recordar a determinats tipus de música. Per exemple el mode frigi ens recorda al flamenc.

2.2.3.4. Harmonia

L'harmonia és tot el que es relaciona amb sons simultanis (acords). L'estudi de l'harmonia implica la construcció, els principis de progressió i les connexions entre notes dels acords.
Hi ha diferents tipus d'acords i depenent de la melodia i de la tonalitat en la qual estiguem haurem d'utilitzar uns o altres.
Els acords normalment es componen de tres notes: la tònica que és la que li dóna nom a l'acord, la mediant que és la tercera de la tònica i la dominant que és la cinquena de la tònica.
Hi ha molts tipus d'acords però els que més s'utilitzen són els majors, els menors, els de sèptima i els semidisminuits.

Acords majors

Si partim de l'escala de Do major i agafem la tònica, la tercera major i la cinquena obtindrem l'acord de Do major.

Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si (Escala de do major)

Do-Mi-Sol (Acord de do major)

Si aquestes tres notes li afegim la setena major o sensible obtindrem un acord major sèptima.

Do-Mi-Sol-Si (Acord de do major sèptima)

L'acord major sèptima s'utilitza quan estem en grau I (Jònic) i en grau IV (Lidi).

Acords menors

Si partim de l'escala de La menor i agafem la tònica, la tercera menor i la cinquena obtindrem l'acord de La menor.

La-Si-Do-Re-Mi-Fa-Sol (Escala de La menor)

La-Do-Mi (Acord de La menor)

Si a aquestes tres notes li afegim la setena menor o subtònica obtindrem un acord menor sèptima.

La-Do-Mi-Sol (Acord de La menor sèptima)

L'acord menor sèptima s'utilitza quan estem en grau II (Dòric), III (Frigi), VI (Eòlic o menor natural).

Acord sèptima

L'acord sèptima està compost per la tònica, la tercera major, la cinquena i la setena menor.

Do-Mi-Sol-Sib (Acord de Do sèptima)

L'acord sèptima s'utilitza quan estem en grau V (Mixolidi).

Acord semidisminuit

L'acord semidisminuit està compost per la tònica, la tercera menor, la cinquena disminuïda (baixar la cinquena un semitò) i la setena menor.

Do-Mib-Solb-Sib (Acord de Do semidisminuit)

L'acord semidisminuit s'utilitza quan estem en grau VII (Locri).

2.2.3.5. Ritme

Com he dit abans, el ritme és el paràmetre que determina la durada del so i del silenci entre una nota i una altra.
Hi ha diversos tipus de notes rítmiques, i cadascuna d'elles té una durada diferent.

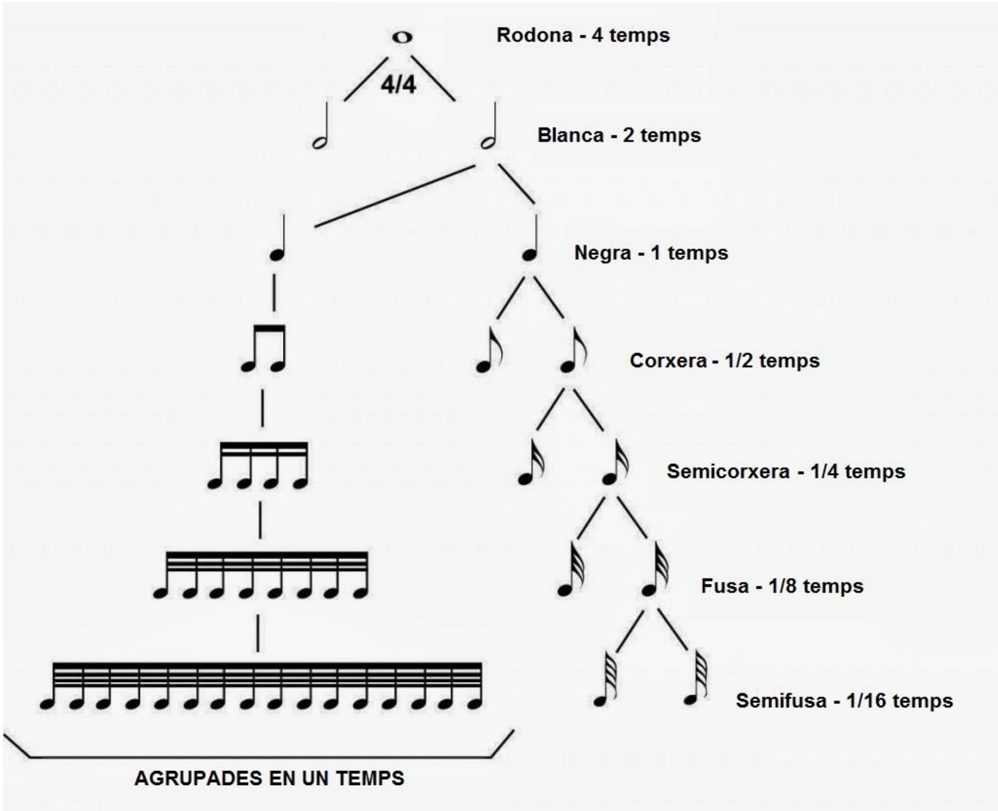


Figura 27: Notes rítmiques

http://literaturacharrua.blogspot.com.es/2013/12/los-arpegios-producen-cosquilleo-en-el.html?view=mosaic

Les notes rítmiques també es poden representar amb nombres:

2 ⟶ blanca
4 ⟶ negra
8 ⟶ corxera
12 ⟶ semicorxera

Si volem que en un moment determinat de la cançó no soni cap so ho indiquem amb un silenci. Els silencis segueixen la mateixa estructura que les notes rítmiques.

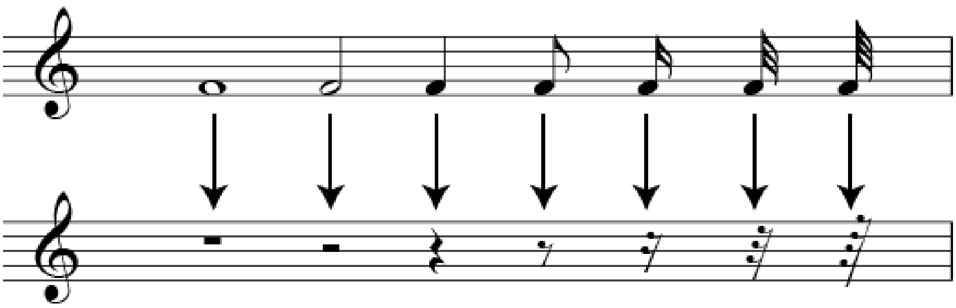


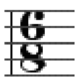
Figura 28: Relació entre notes rítmiques i silencis

http://aprenderguitarradesdecero.blogspot.com.es/2012/03/silencio-suena-la-musica-duracion-de.html

Compassos

Les notes s'organitzen en compassos que es divideixen en parts anomenades temps. Existeixen diversos tipus de compàs en funció del nombre de temps, i per indicar-ho s'utilitzen dos nombres. El nombre de sota ens indica el valor de les notes, i el nombre de dalt ens indica quantes notes amb el valor del nombre inferior hem de posar al compàs.

Exemple:



Aquests nombres ens indiquen que en aquest compàs hem de posar 6 corxeres o altres notes rítmiques que equivalguin a aquest valor.

Figura 29: Compàs 6/8

Captura de pantalla des del programa Musescore

Compassos binaris

Els compassos binaris es divideixen en dos temps. El primer és el temps fort i el segon és el temps dèbil. A l'imatge següent es poden veure els dos moviments que faria un director per portar aquests tipus de compàs.

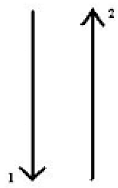


Figura 30: Temps d'un compàs binari

http://blogmusicaclasica.com/ensenanza-musical/lenguaje-musical-temario/tema-5-tipos-de-compases-compas-de-subdivision-binaria-y-compas-de-subdivision-ternaria/

Hi ha dos tipus

- Compàs binari de subdivisió binaria:

Figura 31: Compàs 2/4

https://es.wikipedia.org/wiki/Comp%C3%A1s_(m%C3%BAsica)

A cada compàs hi cap el valor dues negres.

- Compàs binari de subdivisió ternària:

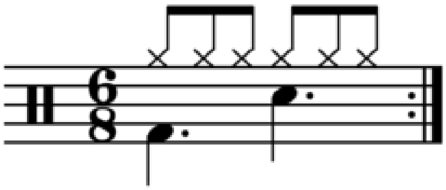


Figura 32: Compàs 6/8

https://es.wikipedia.org/wiki/Comp%C3%A1s_(m%C3%BAsica)

A cada compàs hem de posar el valor de dues negres amb punt[5] o 6 corxeres.

Compassos ternaris:

Els compassos ternaris es divideixen en tres temps. El primer és el temps fort. A l'imatge següent es poden veure els tres moviments que faria un director per portar aquests tipus de compàs.

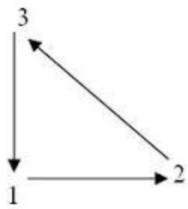


Figura 33: Temps d'un compàs ternari

http://blogmusicaclasica.com/ensenanza-musical/lenguaje-musical-temario/tema-5-tipos-de-compases-compas-de-subdivision-binaria-y-compas-de-subdivision-ternaria/

Hi ha de dos tipus:

- Compàs ternari de subdivisió binaria:

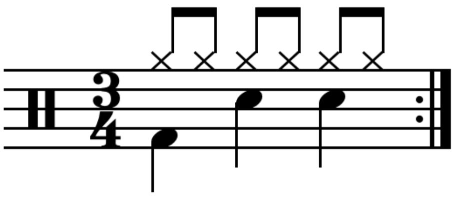


Figura 34: Compàs 3/4

https://es.wikipedia.org/wiki/Comp%C3%A1s_(m%C3%BAsica)

A cada compàs hem de posar el valor de 3 negres.

[5] Si afegim un punt a una nota li estem sumant la meitat del seu valor.

- Compàs ternari de subdivisió ternària:

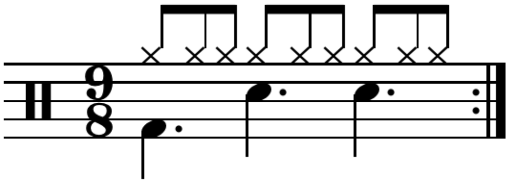


Figura 35: Compàs 9/8

https://es.wikipedia.org/wiki/Comp%C3%A1s_(m%C3%BAsica)

Cada compàs ha de contenir el valor de tres negres amb punt.

<u>Compassos quaternaris:</u>

Els compassos quaternaris es divideixen en quatre temps. El primer és el fort. A l'imatge següent es poden veure els quatre moviments que faria un director per portar aquests tipus de compàs.

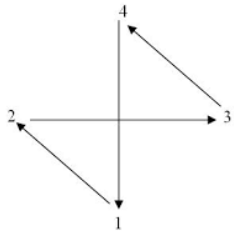


Figura 36: Temps d'un compàs quaternari

http://blogmusicaclasica.com/ensenanza-musical/lenguaje-musical-temario/tema-5-tipos-de-compases-compas-de-subdivision-binaria-y-compas-de-subdivision-ternaria/

Hi ha de dos tipus:

- Compassos quaternaris de subdivisió binaria:

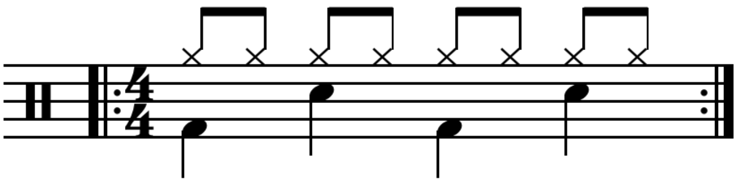


Figura 37: Compàs 4/4

https://es.wikipedia.org/wiki/Comp%C3%A1s_(m%C3%BAsica)

Cada compàs conté el valor de quatre negres.

- Compassos quaternaris de subdivisió ternària:

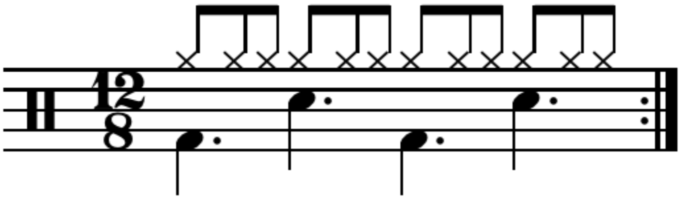


Figura 38: Compàs 12/8

https://es.wikipedia.org/wiki/Comp%C3%A1s_(m%C3%BAsica)

Cada compàs conté quatre negres amb punt.

Existeixen altres tipus de compassos que s’anomenen irregulars, però el seu ús és poc habitual.

2.2.3.6. Claus

Una clau és un signe que ens indica l’altura de la música escrita, assignant a una línia del pentagrama una nota determinada que ens serveix com a referència per saber les altres notes.

Hi ha diverses claus, però les més utilitzades són la del sol i la de fa.

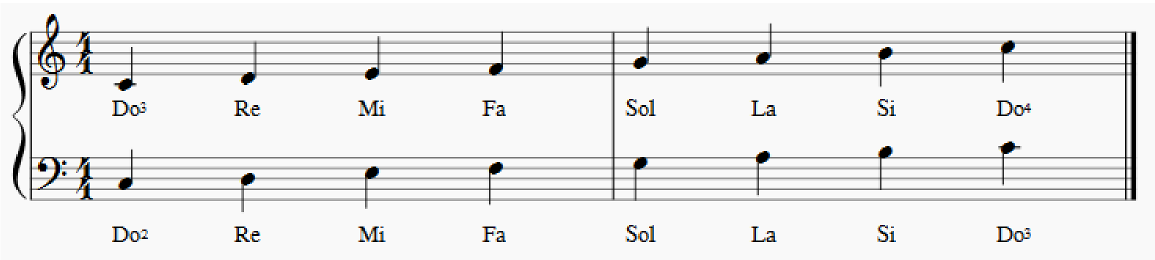


Figura 39: Clau de sol (primer pentagrama) i de fa (segon pentagrama)

Captura de pantalla des de Musescore

La clau de sol s’utilitza per instruments amb notes agudes i la clau de fa per instruments amb notes greus. El Do més agut de la clau de fa és el mateix que el Do més greu de la clau de sol.

Si només volem representar ritmes, s’utilitza la clau de percussió:

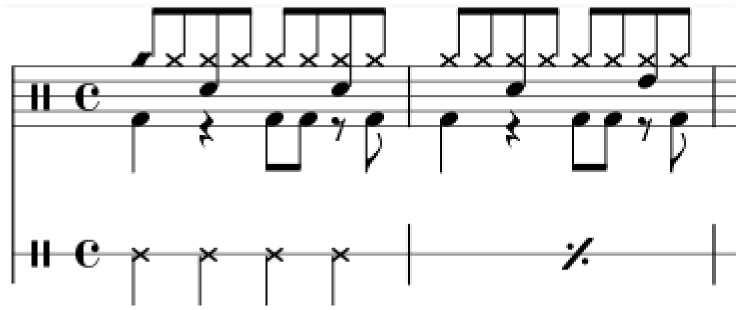


Figura 40: Clau de percussió

Captura de pantalla des de Musescore

2.2.3.7. Nom alternatiu de les notes

Una altra manera d'anomenar les notes és amb lletres de l'alfabet. Aquesta nomenclatura s'utilitza sobretot a Amèrica.

C: és Do D: és Re E: és Mi F: és F G: és Sol
A: és La B: és Si

2.2.4. Música atonal

L'atonalisme és el sistema musical oposat al sistema tonal. El seu principi bàsic consisteix en que cap so predomina per sobre dels altres, és a dir, que no hi ha centre tonal. Com que totes les notes tenen el mateix valor no hi ha efectes de tensió ni de repòs i resulta molt difícil per l'oient preveure quan acaba una peça musical. Una altra característica que té aquest sistema és que la seva harmonia no és funcional, és a dir, que no segueix les normes de l'harmonia tradicional. L'harmonia no funcional consisteix en formar nous acords o acords indeterminats unint unes notes amb altres. Aquests nous acords s'anomenen agregats.

La tècnica principal de composició atonal és el serialisme.

2.2.4.1. Serialisme dodecafònic

El serialisme dodecafònic o dodecafonisme és una tècnica de composició en la qual es dóna la mateixa importància a les dotze notes de l'escala cromàtica. Aquest mètode va ser ideat per Arnold Schönberg però el compositor Josef Matthias Hauer va fer una altre variant, encara que és poc coneguda. Aquesta tècnica consisteix en escriure les notes musicals de l'escala cromàtica un sol cop i en un ordre determinat pel compositor. La sèrie pot oferir quatre modalitats: l'original, la retrogradació, la inversió i la retrogradació de la inversió. A més a més aquestes quatre modalitats es poden transportar a qualsevol interval.

El mètode dodecafònic va ser considerat la màxima creació musical de l'avantguardisme, i els principals compositors, a més de Schönberg, van ser els seus deixebles Alban Berg i Anton Webern. Posteriorment, aquesta tècnica va donar origen al serialisme.

Regles per compondre una peça dodecafònica

A partir de l'escala cromàtica:

Figura 41: Escala cromàtica

Captura de pantalla des de Musescore

- Sèrie original: Es construeix una sèrie ordenant lliurement les notes i sense repeticions.

Figura 42: Sèrie original

Captura de pantalla des de Musescore

- Sèrie retrògrada: S'escriuen les notes de la sèrie original però del revés, és a dir, l'última nota de la sèrie original serà la primera de la retrògrada i així successivament.

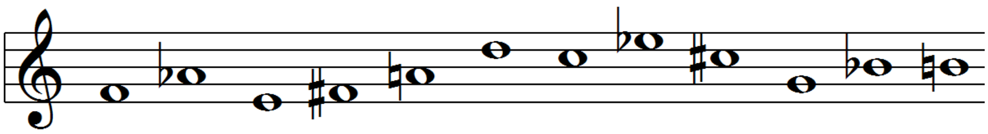


Figura 43: Sèrie retrògrada

Captura de pantalla des de Musescore

- Sèrie invertida: S'inverteixen els intervals que hem utilitzat a la sèrie original, és a dir, si a la sèrie original de la primera a la segona nota hi ha un semitò baixant, a la sèrie invertida escriurem la segona nota a una distància d'un semitò pujant.

Figura 44: Sèrie invertida

Captura de pantalla des de Musescore

- Sèrie retrògrada de l'invertida: S'escriuen les notes de la sèrie invertida del revés.

Figura 45: Sèrie retrògrada de l'invertida

Captura de pantalla des de Musescore

A continuació ja es poden utilitzar aquestes sèries com a material inicial per a la composició, tenint en compte que cal començar amb la sèrie original utilitzant totes les seves notes i seguint el mateix ordre, amb les figures que vulguem i aplicant lliurement tant les inversions i les retrogradacions com les transportacions a diferents intervals, tantes vegades com es vulgui.

Podem escoltar un exemple de música dodecafònica a l'àudio 5. La cançó es diu Suite per pianoforte op.25 i és de Arnold Schönberg.

Xifratge

S'utilitza la lletra O per indicar la sèrie original, I per la inversió, R per la sèrie retrògrada i IR per la retrogradació inversa.

2.2.4.2. Serialisme integral

El serialisme integral és una tècnica de composició musical que té els seus orígens en el dodecafonisme d'Arnold Schönberg. La principal diferència entre el serialisme i el dodecafonisme és que el principi serial del serialisme integral es pot aplicar a diversos paràmetres musicals (ritme, dinàmica, timbre, etc) i no només a l'altura de les notes com en el dodecafonisme. Altres diferències són que per fer una peça amb serialisme integral no és necessari utilitzar les dotze notes de l'escala cromàtica i es poden repetir a gust de l'autor, però el que s'ha de complir és que tots els paràmetres de la composició han de seguir una sèrie predeterminada. El compositor més famós que va utilitzar serialisme integral va ser Pierre Boulez. Podem escoltar una composició feta amb serialisme integral a l'àudio 6. La cançó es diu Piano Sonata nº2 i és de Pierre Boulez.

2.2.5. Música i matemàtiques

Les primeres relacions entre la música i les matemàtiques es van dur a terme per els antics xinesos, egipcis i mesopotàmics. Però els pitagòrics de l'Antiga Grècia, sota el principi de que "tota la naturalesa consisteix en harmonia que brota dels nombres", van ser els que més van desenvolupar aquestes relacions. Ells van ser els primers investigadors de l'expressió de l'escala musical en termes de proporcionalitat numèrica. Amb l'ajuda del monocordi, un instrument d'una sola corda, van estudiar quines eren les proporcionalitats agradables a l'oïda i van formar les primeres escales musicals. A la imatge següent es pot veure com va anomenar Pitàgores a cada proporció.

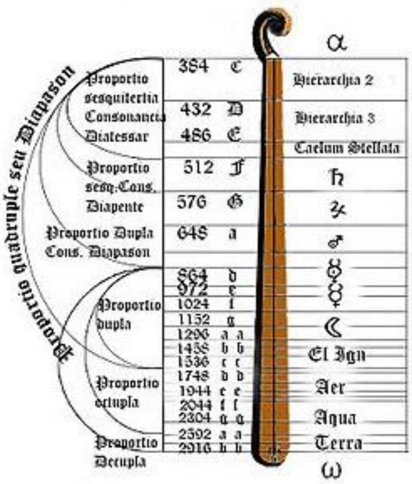


Figura 46: Monocordi amb les proporcionalitats indicades

https://es.wikipedia.org/wiki/Monocordio

Actualment, la matemàtica és una de les bases de la música i està present en moltes àrees com per exemple a les afinacions, la disposició de les notes, els acords i les harmonies, el ritme, el temps i la nomenclatura.
Un exemple molt evident de les relacions entre música i matemàtiques son les relacions entre les freqüències de les notes. Com podem veure la majoria d'elles són fraccions simples.

C	D	E	F	G	A	B	C (octava aguda)
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/6	2

Durant el segle XX Iannis Xenakis va popularitzar la música estocàstica. Aquesta tècnica consistia en crear obres musicals utilitzant sobretot la teoria de la probabilitat i l'estadística i aplicant-les a música electrònica i computada. Per fer-ho primer feia gràfics que posteriorment interpretava com a música.

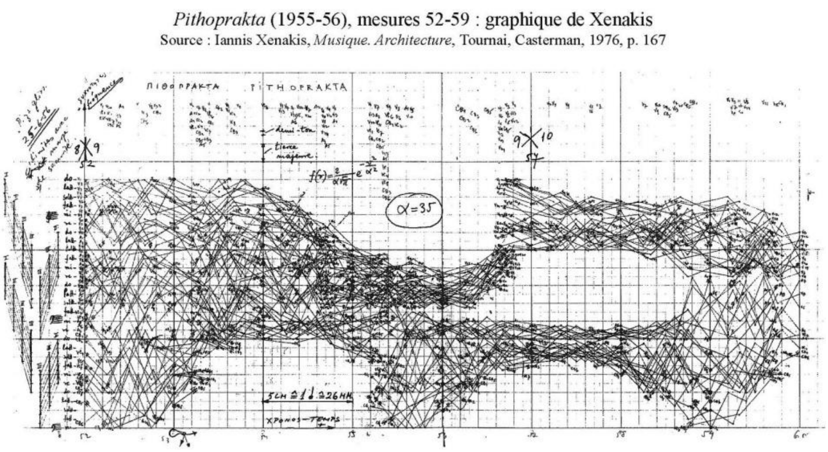


Figura 47: Gràfic fet per Xenakis

http://www.conceptoradio.net/2013/04/25/a-fondo-iannis-xenakis/

Podem escoltar una cançó dodecafònica a l'àudio 7. La cançó es diu Metastaseis i és de Iannis Xenakis.

2.2.5.1. Successió de Fibonacci i raó d'or a la música

Al llarg de la història la successió de Fibonacci i la raó d'or s'han utilitzat en moltes àrees de l'art. Durant el segle XX tant la successió com la raó d'or van guanyar molta popularitat en l'àmbit musical i molts músics van experimentar amb les seves propietats.

La construcció d'instruments va ser una de les primeres àrees on es va utilitzar el nombre d'or. El mètode Baginsky per a la construcció de violins és un dels més famosos. També es pot trobar el nombre d'or en gairebé tots els instruments amb trasts, fent el quocient de determinades distàncies entre aquests.

Figura 48: Violí amb proporcions d'or

http://exapenta.neocities.org/CUERDAS_STRINGS.html

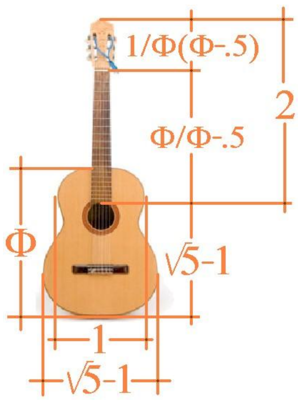


Figura 49: Guitarra amb proporcions d'or

http://www.geocities.ws/ccalvimontesr/CUERDAS_STRINGS.html

En quan a la composició de peces, a l'obra de Mozart s'han trobat diverses relacions amb el nombre d'or. Les seves sonates per a piano es divideixen en tres seccions diferents: exposició, desenvolupament i recapitulació. En el primer moviment de la sonata número 1 en Do major l'exposició ocupa 38 compassos i el desenvolupament i la recapitulació 62. Tenim que $\frac{62}{38} \approx \varphi$ i $62 + 38$ és la millor divisió de 100 que es pot fer aproximant la raó d'or.

A la cinquena simfonia de Beethoven el famós “motto” surt a l’inici i al final i també en els compassos: $\frac{Total}{\varphi}$ i $Total - \frac{Total}{\varphi}$.

El sistema cromàtic de Béla Bartók es basa en les lleis de la proporció d’or i especialment de la successió de Fibonacci. Bártok va establir un sistema on relacionava els nombres de Fibonacci amb els intervals. D’aquesta manera podia composar obres que seguissin aquesta successió.

A partir del anys 70 el músic Elliott Sharp va fer música experimental utilitzant alguns algoritmes i la successió de Fibonacci. Aquesta successió normalment l’utilitza per determinar les diferents afinacions que fa servir.

El compositor colorista i matemàtic Joseph Schillinger desenvolupà, a principis del segle XX, un sistema de composició musical en què notes successives de la melodia seguien intervals de Fibonacci. Per a Schillinger, aquests salts de Fibonacci transmetien el mateix sentit d’harmonia que les proporcions fil·lotàxiques (disposició de fulles i flors) en botànica.

El compositor mallorquí Joan Serra composà en ocasió de l’any mundial de les matemàtiques (any 2000) una obra electrònica basada explícitament en una intervàlica de Fibonacci.

L’any 2000 la banda de metal progressiu americana “Tool” va gravar la cançó Lateralus. Per fer les estrofes de la lletra van utilitzar la successió de Fibonacci d’aquesta manera:

(1) Black, (1) then, (2) white are, (3) all I see, (5) in my infancy, (8) red and yellow then came to be, (5) reaching out to me, (3) let's me see.

A més a més Maynard, el cantant, comença a cantar al minut 1:37, és a dir, quan han passat 97 segons. Això és aproximadament 1,618 (φ) d’un minut complert.

3. Part pràctica

La part pràctica d'aquest treball consisteix en crear peces musicals que segueixin la successió de Fibonacci i que continguin el nombre d'or. He fet composicions amb diverses tècniques diferents, però els passos que he seguit per compondre les diferents cançons són molt semblants.

3.1. Successió de Fibonacci amb wxMaxima

El primer pas que s'ha de fer per poder treballar còmodament amb la successió és modular-la ja que, com he explicat anteriorment en aquest treball, els seus nombres són molt grans i infinits. Per fer-ho he fet servir el programa wxMaxima, un sistema d'àlgebra computacional lliure escrit en llenguatge Lisp que serveix com a motor de càlcul simbòlic.
Abans d'obtenir la successió de Fibonacci modulada he hagut de representar la successió de Fibonacci sense modular. Per fer-ho, un cop obert el programa, he seguit els passos següents:

- Primer he esborrat tot el que tenia en memòria per evitar que hi hagi errors a causa de la possible assignació de valors a alguna lletra. Això es fa amb la funció "kill" (en català matar), que permet esborrar aquests valors.
- Un cop fet això he escrit la successió de Fibonacci amb el llenguatge de programació d'aquest programa. Com aquesta successió només es pot representar mitjançant una relació de recurrència, he establert un valor de "a" per a una "n" inicial i un altre valor de "a" per a "n+1".
- Seguidament amb el comandament "makelist" (en català "fer llista") he fet una llista dels diferents termes de la successió, per fer-ho primer he indicat de quina successió volem fer una llista i de quin nombre "n_1" a quin nombre "n_2" vull anar. Aquesta llista representarà la successió amb tants nombres com haguem indicat.

El símbol del dollar s'utilitza per indicar al programa que volem que tingui en compte les operacions fetes però que no volem que les representi.

A la imatge següent podem veure els tres passos que he explicat anteriorment. La primera línia de la imatge és la funció “kill”, la segona i la tercera línia és la successió de Fibonacci escrita amb una relació de recurrència i per últim tenim la funció “makelist”, en aquest cas de l’1 al 100.

```
kill(all)$
a[1]:0 $ a[2]:1$
a[n]:=(a[n-1]+a[n-2])$
makelist([a[n]],n,1,100);
```

Figura 50: Successió de Fibonacci a wxMaxima

Captura de pantalla des de wxMaxima

Un cop fet això obtenim la successió de Fibonacci.

```
(%o4)* [[0],[1],[1],[2],[3],[5],[8],[13],[21],[34],[
55],[89],[144],[233],[377],[610],[987],[1597],[2584],[
4181],[6765],[10946],[17711],[28657],[46368],[75025],[
121393],[196418],[317811],[514229],[832040],[1346269],[
2178309],[3524578],[5702887],[9227465],[14930352],[
24157817],[39088169],[63245986],[102334155],[165580141],[
267914296],[433494437],[701408733],[1134903170],[
1836311903],[2971215073],[4807526976],[7778742049],[
12586269025],[20365011074]]
```

Figura 51: Successió de Fibonacci

Captura de pantalla des de wxMaxima

Per modular aquesta successió he aplicat la funció “mod” (modulate, modular en català). Per fer-ho primer he escrit “mod” posant entre parèntesis el nombre de fila que vull modular, en aquest cas (%o4)*, i quants nombres diferents vull obtenir, en aquest cas (11). Aquestes dues dades s’han de posar separades per una coma.

```
(%i13) mod(%o4,11);
(%o13) [[0],[1],[1],[2],[3],[5],[8],[2],[10],[1],[0]
,[1],[1],[2],[3],[5],[8],[2],[10],[1],[0],[1],[1],[
2],[3],[5],[8],[2],[10],[1],[0],[1],[1],[2],[3],[5]
,[8],[2],[10],[1],[0],[1],[1],[2],[3],[5],[8],[2],[
10],[1],[0],[1]]
```

Figura 52: Successió de Fibonacci modulada en 11.

Captura de pantalla des de wxMaxima

Com podem veure les modulacions no són infinites ja que hi ha una sèrie de nombres que es van repetint. En aquest cas la sèrie de 10 nombres, des del primer zero fins al tercer 1, es va repetint.

Un cop modulem la successió de Fibonacci ja tenim la base per començar a compondre cançons. Hi ha diverses tècniques per fer-ho, però com el que més domino és la música moderna occidental la primera que he provat ha estat aquesta.

3.1.2. Composicions amb música moderna occidental

Per fer música amb la successió de Fibonacci i la raó d'or seguint les normes de la música moderna occidental cal seguir les lleis de la melodia, de l'harmonia i del ritme. Una composició pot utilitzar tonalitats diferents, però per fer-ho més senzill he utilitzat una sola tonalitat per a cada cançó. Per fer una melodia que segueixi la successió de Fibonacci he seguit els passos següents:

- Primer he establert amb quina tonalitat volia treballar per saber les notes que faria servir. La primera tonalitat amb la que he treballat ha sigut la de Sol major ja que és una de les més simples. En aquest cas utilitzo les notes de l'escala de sol major, G A B C D E F#.
- Un cop triada la tonalitat he modulat la successió de Fibonacci amb tants nombres com té l'escala. En aquest cas com set notes són poques he utilitzat dues octaves d'aquesta escala, indicant amb el signe de l'apòstrof (') les notes de l'octava més aguda. Per tant s'ha de modular la successió per obtenir 14 xifres diferents.

```
(%i16) mod(%o4,14);
(%o16) [[0],[1],[1],[2],[3],[5],[8],[13],[7],[6
],[13],[5],[4],[9],[13],[8],[7],[1],[8],[9],[3
],[12],[1],[13],[0],[13],[13],[12],[11],[9],[6]
,[1],[7],[8],[1],[9],[10],[5],[1],[6],[7],[13]
,[6],[5],[11],[2],[13],[1],[0],[1],[1],[2]]
```

Figura 53: Successió de Fibonacci modulada en 14

Captura de pantalla des de wxMaxima

- Desprès he assignat a cada nota de l'escala un nombre. En aquest cas:

G: 0	D: 4	A': 8	E': 12
A: 1	E: 5	B': 9	F#': 13
B: 2	F#: 6	C': 10	
C: 3	G': 7	D': 11	

- Seguidament he copiat la successió modulada a l'editor de textos Microsoft Word per canviar amb l'opció "reemplaçar" cada nombre per la seva nota corresponent.

  Abans de substituir:

  [0],[1],[1],[2],[3],[5],[8],[13],[7],[6],[13],[5],[4],[9],[13],[8],[7],[1],[8],[9],[3],[2],
  [1],[13],[0],[13],[13],[12],[11],[9],[6],[1],[7],[8],[1],[9],[10],[5],[1],[6],[7],[13],
  [6],[5],[11],[2],[13],[1]

  Desprès de substituir:

  G,A,A,B,C,E,A',F#',G',F#,F#',E,D,B',F#',A',G',A,A',B',C,E',A,F#',G,F#',
  F#',E',D',B',F#,A,G',A',A,B',C',E,A,F#,G',F#',F#,E,D',B,F#',A

- Un cop tinc la successió canviada a notes ho he passat tot a so per escoltar com sona. Per fer-ho he utilitzat el programa musical Musescore que permet fer creacions musicals des de l'ordinador. Un cop obert el programa primer he de dir-li en quin to estic treballant per utilitzar l'armadura[6] correcte, en aquest cas G major, i després ja puc començar a escriure les notes.

[6] Són el conjunt de notes alterades en una composició. S'indica a l'inici de cada línia.

Figura 54: Melodia en Sol major

Captura feta des de Musescore

Aquest és el resultat final d'una melodia que segueix la successió de Fibonacci. Es pot escoltar a l'àudio 8.

Desprès de fer una melodia amb una escala major he provat com sonaria la successió de Fibonacci amb una escala menor. El resultat ha estat el següent:

Figura 55: Melodia en Si menor

Captura feta des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 9.

Un cop fetes les melodies s'han d'acompanyar amb una harmonia. Per fer-ho he seguir els mateixos passos que per fer la melodia, però en comptes d'agafar la successió de Fibonacci modulada en 14, l'he agafat modulada en 7. Podem posar diversos acords a una melodia però, tal i com he explicat a l'apartat d'acords, depèn de quin grau de la tonalitat vulguem tractar utilitzarem uns o altres. Com he utilitzat la tonalitat de G major, els acords que puc fer servir són els següents:

Gmaj7- Am7- Bm7- Cmaj7- D7- Em7- F#semidism

Ordenats seguint la successió de Fibonacci queden de la següent manera:

Gmaj7,Am7,Am7,Bm7,Cmaj7,Em7,Am7,F#semidism,Gmaj7,F#semidism,F#semidism,Em7,D7,Bm7,F#semidism,Am7

Un cop obtinguda la successió d'acords he posat, juntament amb la melodia de G major, un acord per compàs. El resultat ha sigut el següent:

Figura 56: Melodia i harmonia en Sol major

Captura de pantalla feta des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 10.

Per últim calia posar ritme a la composició. Com que les rodones tenen una duració molt llarga i les fuses i les semifuses molt curta no he utilitzat aquests valors per al ritme. Per tant, he agafat la successió modulada en 4 i he fet servir el mateix procediment que per fer les melodies i l'harmonia. Els valors utilitzats són blanques, negres, corxeres i semicorxeres. Ordenats segons Fibonacci queden així:

Blanca-Negra-Negra-Corxera-Semicorxera-Negra

Si apliquem aquest ritme a la melodia feta en Si menor queda de la següent manera:

Figura 57: Melodia i ritme en Si menor

Captura de pantalla feta des de Musescore

Es pot sentir com sona a l'àudio 11.

El ritme que surt és molt estrany i és per això que he fet una altra cançó utilitzant tant les notes rítmiques com els silencis, és a dir, utilitzant Blanca-negra-corxera-semicorxera-Sblanca-Snegra-Scorxera-Ssemicorxera. Per fer-ho he utilitzat la successió de Fibonacci modulada en 8. Tots els valors ordenats segons Fibonacci queden així:

Blanca,Negra,Negra,Corxera,Semicorxera,Snegra,Blanca,Snegra,

Snegra,Corxera,Ssemicorxera,Negra

Si apliquem aquest ritme a la melodia feta en Si menor queda de la següent manera:

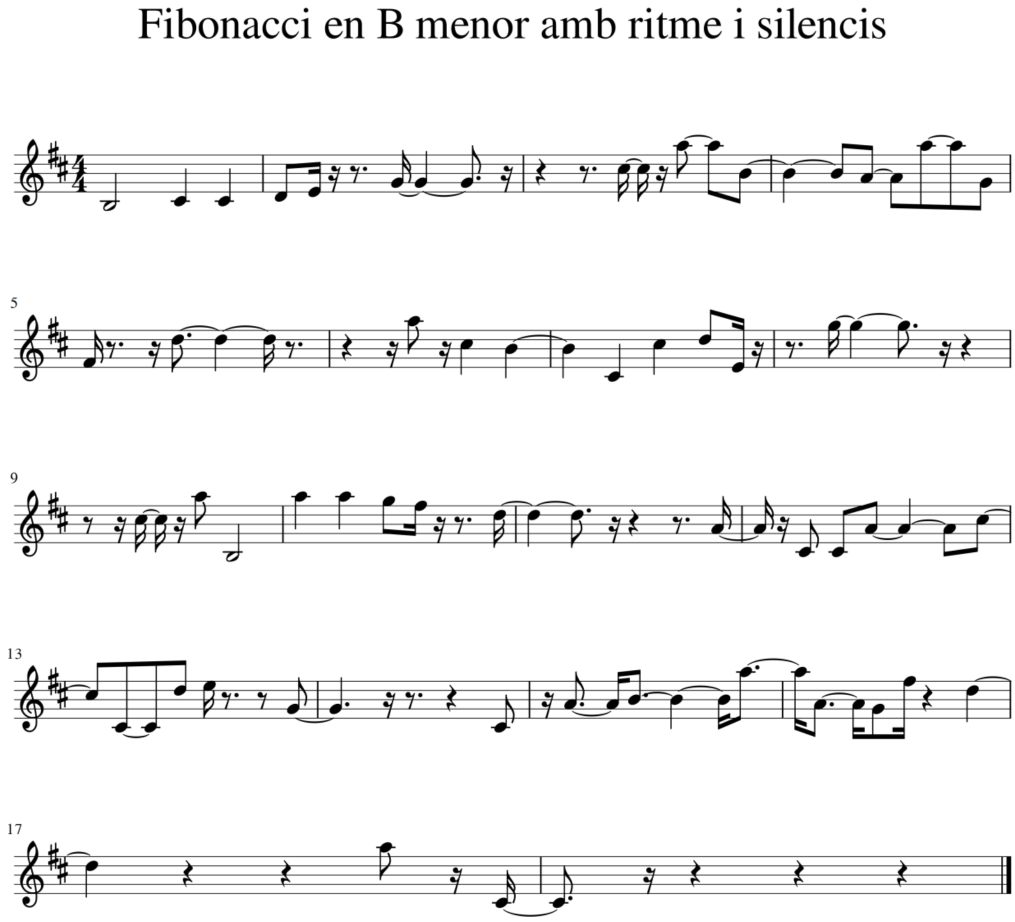


Figura 58: Melodia amb ritme i silencis en Si menor

Captura de pantalla feta des de Musescore

Es pot sentir com sona a l’àudio 12.

Encara que he afegit silencis a aquesta melodia el ritme continua sonant malament ja que la combinació de notes rítmiques i silencis és força estranya i segurament un músic no l’utilitzaria per fer una cançó.

Un cop fetes la melodia, l’harmonia i el ritme m’hagués agradat fer una cançó que combines les tres coses i que seguís la successió de Fibonacci, però utilitzant les tècniques de la música moderna occidental no és possible fer una composició que compleixi aquests requisits i que soni bé. Buscant una solució a aquests problemes vaig pensar en utilitzar les tècniques del dodecafonisme i el serialisme.

3.1.3. Composicions amb dodecafonisme

Com he explicat a l'apartat de dodecafonisme, s'han de seguir diversos passos per fer una cançó amb aquesta tècnica. A partir de l'escala cromàtica he d'ordenar les notes, com vull que aquesta composició segueixi tant la raó d'or com la successió de Fibonacci per triar des de quina nota començaré a contar d'un total de 12 notes, he buscat el nombre que quan divideixes 12 entre ell s'apropi més al nombre d'or. Aquest nombre és el 8 ja que $\frac{12}{8} = 1{,}5 \approx \varphi.$ A causa d'això començaré a contar des de la nota que ocupi la posició 8 dins de l'escala cromàtica, és a dir, el Sol.

A partir de l'escala cromàtica començant des de Sol:

Sol Sol# La La# Si Do Do# Re Re# Mi Fa Fa#

Amb la successió de Fibonacci original i a partir del Sol m'he anat movent tantes posicions com el nombre de la successió indicava. Els nombres de la successió són: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89... Com el primer nombre és un 0 vol dir que no ens m'he de moure, per tant la primera nota serà un Sol, després m'he de moure una posició i tindrem un Sol#, després una altra posició i tindrem un La, i així successivament. Com les notes no es poden repetir a mida que les he escrit les he anat ratllant per no comptar amb elles quan ens movem de posició. Al final d'aquest procés he obtingut una sèrie de notes ordenades segons Fibonacci i que compleixen els requisits del dodecafonisme:

Sol Sol# La Si Re La# Do# Fa Fa# Do Re# Mi

Figura 59: Sèrie original

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 13.

Un cop feta la sèrie original he fet la sèrie retrògrada. Com la última nota de la sèrie original és un Mi, a la sèrie retrògrada serà la primera i així successivament. He obtingut la següent melodia:

Mi Re# Do Fa# Fa Do# La# Re Si La Sol# Sol

Figura 60: Sèrie retrògrada

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 14.

Desprès he fet la sèrie invertida. Com a la sèrie original de la primera a la segona nota tinc un semitò pujant, la segona nota de a sèrie invertida haurà d'estar a una distància d'un semitò baixant, i així successivament. La sèrie invertida queda així:

Sol Fa# (greu) Fa (greu) Re# (greu) Do (greu) Mi (greu) Do# (greu) La (greu) Sol# (greu) Re (greu) Si (greu) La# (greu)

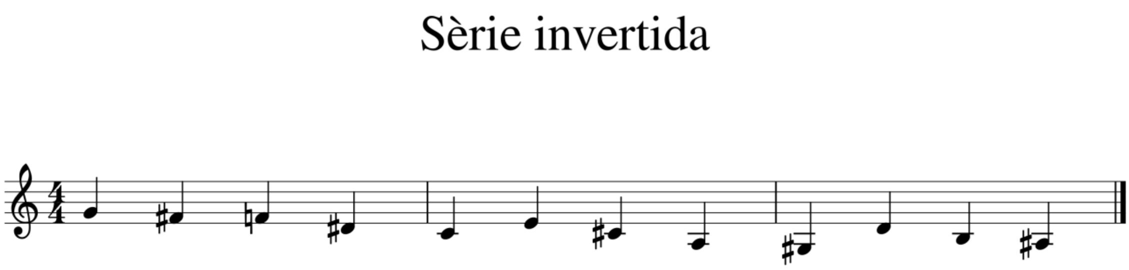


Figura 61: Sèrie invertida

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 15.

Per últim he fet la sèrie retrògrada de l'invertida. Per fer-ho he escrit les notes de la sèrie invertida del revés, és a dir, començant des del La#. La sèrie retrògrada de l'invertida queda així:

La# (greu) Si (greu) Re (greu) Sol# (greu) La (greu) Do# (greu) Mi (greu) Do (greu) Re# (greu) Fa (greu) Fa# (greu) Sol

Figura 62: Sèrie retrògrada de l’invertida

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l’àudio 16.

Un cop tinc les quatre sèries les he d’unir per tenir la composició completa. Tal i com he explicat a l’apartat de dodecafonisme hem de començar amb la sèrie original utilitzant totes les seves notes i seguint el mateix ordre, amb les figures que vulguem i aplicant lliurement tant les inversions i les retrogradacions com les transportacions a diferents intervals. Per tenir més sèries per combinar he fet una transportació. Per triar a quina nota volia transportar les quatre sèries he buscat quin era el nombre de posicions que m’havia de moure des de Sol per tal de que quan dividís 8, la posició que ocupa Sol a l’escala cromàtica, entre aquest nombre de posicions doni una aproximació al nombre d’or. El resultat és que m’he de moure 5 posicions perquè $\frac{8}{5} = 1{,}6 \approx \varphi$. Si em moc 5 posicions des de Sol obtinc la nota Do.

Sol Sol# La La# Si Do Do# Re Re# Mi Fa Fa#

1 2 3 4 5

D’aquesta manera he fet el mateix que per obtenir les quatre sèries des de Sol però començant des de Do.

A partir de l’escala cromàtica començant des de Do:

Do Do# Re Re# Mi Fa Fa# Sol Sol# La La# Si

Amb la successió de Fibonacci original i a partir del Do em moc tantes posicions com m'indiqui el nombre de la successió.
Al final d'aquest procés obtinc una sèrie de notes ordenades segons Fibonacci i que compleixen els requisits del dodecafonisme:

Do Do# Re Mi Sol Re# Fa# La# Si Fa Sol# La

Figura 63: Sèrie original

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 17.

Un cop feta la sèrie original he de fer la sèrie retrògrada. Com la última nota de la sèrie original és un La, a la sèrie retrògrada serà la primera i així successivament. Obtinc la següent melodia:

La Sol# Fa Si La# Fa# Re# Sol Mi Re Do# Do

Figura 64: Sèrie retrògrada

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 18.

Després he de fer la sèrie invertida. Com a la sèrie original de la primera a la segona nota tinc un semitò pujant, la segona nota de a sèrie invertida haurà d'estar a una distància d'un semitò baixant, i així successivament. La sèrie invertida queda així:

Do Si (greu) La# (greu) Sol# (greu) Fa (greu) La (greu) Fa# (greu) Re (greu) Do# (greu) Sol (greu) Mi (greu) Re# (greu)

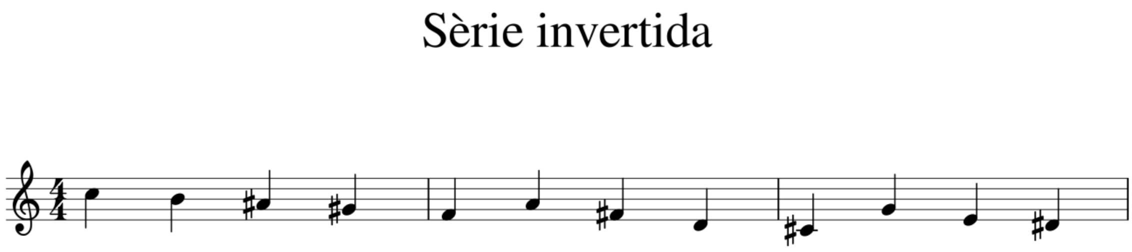


Figura 65: Sèrie invertida

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l’àudio 19.

Per últim he fet la sèrie retrògrada de l’invertida. Per fer-ho he escrit les notes de la sèrie invertida del revés, és a dir, començant des del Re#. La sèrie retrògrada de l’invertida queda així:

Re# (greu) Mi (greu) Sol (greu) Do# (greu) Re (greu) Fa# (greu) La (greu) Fa (greu) Sol# (greu) La# (greu) Si (greu) Do

Figura 66: Sèrie retrògrada de l’invertida

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l’àudio 20.

Un cop fetes les 8 sèries s’han d’ordenar per tenir la composició dodecafònica completa. Les 8 sèries són OSol-RSol-ISol-IRSol-ODo-RDo-IDo-IRDo. Per ordenar-les he fet servir el mateix sistema que per fer les composicions originals, és a dir, anar movent-me tants cops com m’indiqui el nombre de la successió de Fibonacci i ratllar el que ja he utilitzat. L’ordre que em queda és el següent:

OSol-RSol-ISol-ODo-IRDo-RDo-IRSol-IDo

Un cop tinc l'ordre ja puc fer la composició dodecafònica completa.

Figura 67: Melodia dodecafònica

Captura feta des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 21.

Aquesta melodia sona estranya degut a que no estem acostumats a escoltar aquest tipus de música. Com a composició dodecafònica està bé i el que faltaria seria posar-li un ritme adequat, però com en aquest tipus de composicions el ritme el fa el músic al seu gust, i aquest treball consisteix en fer composicions seguint la successió de Fibonacci i la raó d'or, he deixat la melodia sola.

3.1.4. Composicions amb serialisme integral

La principal diferència entre el dodecafonisme i el serialisme integral és que al serialisme integral no només s'utilitzen sèries per fer les melodies, sinó que també podem trobar sèries en el ritme, l'harmonia i tots els paràmetres que estiguem utilitzant per fer aquesta composició. Una altra característica és que podem repetir les notes tantes vegades com vulguem. Per fer una composició amb serialisme integral i que segueixi la successió de Fibonacci el que he fet és escriure l'escala cromàtica i anar movent-me tantes posicions com indiqui la successió per escriure les diferents notes. Com al serialisme es podem repetir les notes no he ratllat les que ja havia utilitzat.

Escala cromàtica:

Figura 68: Escala cromàtica

Captura de pantalla des de Musescore

He utilitzat els 37 primers termes de la successió de Fibonacci:

0, 1, 1, 2 , 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465 i 14930352.

Com em surten números molt grans he modulat la successió en 12:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 1, 9, 10, 7, 5, 0, 5, 5, 10, 3, 1, 4, 5, 9, 2, 11, 1

Finalment la peça queda així:

Figura 69: Melodia de serialisme

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l'àudio 22.

Un cop feta la melodia falta posar-li un ritme que també segueixi la successió de Fibonacci. Per fer-ho he seguit els mateixos passos que per fer el ritme a les cançons de música moderna occidental. Com a les composicions normals hi ha tant notes rítmiques com silencis, he agafat directament la sèrie que incloïa les dues coses. Aquesta sèrie és la següent:

Blanca,Negra,Negra,Corxera,Semicorxera,Snegra,Blanca,Snegra,Snegra,

Corxera,Ssemicorxera,Negra.

Un cop aplicat el ritme la composició queda de la següent manera:

Figura 70: Melodia de Serialisme amb ritme

Captura de pantalla des de Musescore

Es pot escoltar a l’àudio 23.

Amb aquesta melodia passa igual que amb la de dodecafonisme, com no estem acostumats a escoltar aquest tipus de música ho sentim molt estrany, però encara que soni així és una melodia que compleix les normes del serialisme i segueix la successió de Fibonacci. Encara que he utilitzat la mateixa sèrie per fer el ritme aquí que a la música moderna occidental, en aquesta composició té més sentit ja que el serialisme integral consisteix en fer música amb sèries i no segueix la mateixa estètica que la música moderna occidental.

4. Conclusions

Quan vaig començar a fer aquest treball em vaig proposar uns objectius per assolir i ara és el moment de veure si els he complert tots.
El dos primers objectius eren definir la successió de Fibonacci i la raó d'or i relacionar-les amb la natura i l'art. Això ho vaig assolir a la primera part del treball on aquests dos termes estan definits, s'esmenten les seves propietats i es relacionen entre si.

El tercer objectiu era explicar quins criteris s'han de seguir per composar una melodia musical amb sentit. Aquest el vaig complir al segon bloc de la primera part del treball on explico tots els conceptes musicals i les normes que s'han de seguir per composar cançons.

El quart i últim objectiu era fer composicions musicals que seguissin tant les tècniques de composició com la successió de Fibonacci i el nombre d'or. Aquest objectiu és el que més em va costar d'assolir, però finalment el vaig aconseguir a la part pràctica del treball. Al principi només tenia pensat fer composicions que seguissin les normes de la música moderna occidental, però a mida que feia les diferents cançons em vaig adonar de que cada cop sonaven més estranyes. Quan només havia fet melodies sense harmonia ni ritme, encara que no sonaven del tot bé, complien les normes de composició musical i seguien la successió de Fibonacci per tant, estava bé. Però quan vaig afegir-li l'harmonia vaig començar a tenir els primers problemes. Per afegir els diferents acords vaig seguir el mateix mètode que per fer les melodies, i el que passava era que encara que els acords corresponguessin a la tonalitat de la melodia a la que acompanyaven, a vegades no sonaven del tot bé. Això és degut a que a part de mirar la tonalitat, també hem de tenir en compte que les notes del compàs que acompanyen a l'acord siguin compatibles amb les diferents notes que conté l'acord. Quan vaig arribar a aquest punt no sabia si arreglar les notes que estaven malament o deixar-ho tal i com la successió de Fibonacci m'indicava, però finalment vaig decidir deixar-ho com estava ja que aquest treball consisteix en fer composicions que segueixin aquesta successió. A més a més les notes que no corresponien eren poques i havies d'estar molt atent per notar-les.

La part més difícil va ser posar ritme a la composició. Vaig seguir el mateix sistema que per fer la melodia i l'harmonia i desprès de provar de fer-ho tant sense silencis com amb silencis em vaig adonar de que no sonava bé ja que el ritme que queda és molt estrany. Volia fer una cançó que combinés melodia, harmonia i ritme però com el ritme no quedava bé i l'harmonia tenia algunes errades vaig decidir no fer-ho. A partir d'aquí vaig haver de buscar una solució per resoldre aquests problemes i va ser quan vaig pensar amb la música atonal. Primer vaig definir-la i vaig explicar les seves tècniques de composició principals i desprès vaig triar les tècniques del dodecafonisme i del serialisme integral per fer les cançons. Amb aquestes dues tècniques les cançons sonen estranyes perquè no estem acostumats a escoltar aquests tipus de música, però compleixen els criteris de composició i a més a més segueixen la successió de Fibonacci i en el cas del dodecafonisme també el nombre d'or.

D'aquesta manera vaig aconseguir complir tots el objectius proposats. Però encara que els objectius estiguin complerts i la música tingui molta relació amb les matemàtiques, en conclusió jo crec que per fer una bona cançó no podem seguir únicament successions o matemàtiques en general. Està molt bé guiar-se per sèries per fer una composició però al final el que vols és fer música que soni bé i per fer-ho el millor que es pot fer és aplicar el criteri humà i decidir que vols fer o què no vols fer a la teva cançó. Al cap i a la fi les sèries no deixen de ser simples números però la música és molt més que això, ja que el que busca és despertar sentiments en l'oient i per fer-ho els músics han d'invertir sentiments en ella.

5. Altres propostes de treball

Un cop acabat aquest treball se'm van acudir noves idees i vaig pensar que seria interessant exposar-les per si algú vulgues aprofundir més en el tema o experimentar amb nous mètodes.

Una de les maneres alternatives de fer melodies seria mirant la freqüència de les notes. Es podrien establir relacions entre aquestes freqüències i ordenar les notes de manera que amb la divisió de dues notes contigües obtinguéssim el nombre d'or. També podríem fer la suma de tots els nombres d'una freqüència (l'enter amb els seus decimals) i mirar si algun dels resultats coincideix amb algun dels nombres de Fibonacci. D'aquesta manera podríem fer les composicions només amb les notes que tinguessin una freqüència equivalent a algun nombre d'aquesta successió.

El ritme va ser el més difícil de fer, ja que costa molt trobar la manera de que segueixi la successió de Fibonacci i a més a més que soni bé. Una alternativa seria fer un ritme seguint el criteri d'un músic però utilitzant un nombre de notes determinat de cada valor. D'aquesta manera podríem fer un ritme agradable per l'oïda humana. A la vegada, si dividíssim el nombre total de notes amb un mateix valor entre el nombre total de notes amb un mateix valor entre elles, però diferent al del primer grup, obtindríem una aproximació al nombre d'or.

Per últim vaig pensar que una altra opció per fer melodies seria fer una nova escala musical. Per fer-ho el que faria seria modular la successió de Fibonacci en 2 i assignar a un dels nombres la paraula "to" i a l'altre nombre la paraula "semitò". Desprès a partir de l'escala cromàtica m'aniria movent un to o un semitò depenent del que m'indiqués la successió. D'aquesta manera obtindríem un seguit de notes que podríem anomenar l'escala de Fibonacci. A partir d'aquí podríem fer composicions amb aquesta escala.

Totes aquestes propostes són hipòtesis i no està garantit que amb tots els mètodes puguin sortir bones composicions.

6. Bibliografia

Llibres

Successió de Fibonacci

- KOSHY, Thomas. Fibonacci amb Lucas Numbers with Applications. Canadà: Editorial John Wiley & Sons, 2011. 672 p. (Pure and Applied Mathemàtics)

Webs

Successions

- <http://capluisangel.blogspot.com.es/> [amb accés el 20 de setembre de 2015]
- <https://dl.dropboxusercontent.com/u/60679769/MATES1BAT/limits_indin.html> [amb accés el dia 20 de setembre de 2015]
- <https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_matem%C3%A1tica> [amb accés el dia 20 de setembre de 2015]

Successió de Fibonacci

- <https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci>[amb accés el dia 27 de setembre de 2015]
- <https://madsciencetech.wordpress.com/2014/08/23/things-to-know-about-fibonacci-and-his-numbers/> [amb accés el dia 27 de setembre de 2015]
- <https://hrexach.wordpress.com/2014/12/11/the-golden-ratio-fibonacci-sequence/> [amb accés el dia 27 de setembre de 2015]
- <http://www.geohikers.es/matematicas-en-la-naturaleza-ii-y-sin-embargo-el-universo-tambien-es-euclidiano/> [amb accés el dia 24 d’octubre de 2015]
- <https://ztfnews.wordpress.com/2013/11/06/generaciones-de-abejas-y-numeros-de-fibonacci/> [amb accés el dia 24 d’octubre de 2015]

El nombre d’or

- <https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo#Historia_dde_n.C3.BAmero_.C3.A1ureo> [amb accés el dia 4 d’octubre de 2015]

- <http://laproporcionperfecta.blogspot.com.es/2011/06/numero-de-oro.html> [amb accés el dia 4 d'octubre de 2015]
- <http://matematizaturealidad.blogspot.com.es/2014/06/la-divina-proporcion-girasoles-ciclones.html> [amb accés el dia 4 d'octubre de 2015]
- <http://www.socionomics.net/2010/03/socionomics-and-fibonacci-golden-ratio-governs-life-beauty-and-the-universe-2/> [amb accés el dia d'octubre de 2015]
- <http://veromg87.blogspot.com.es/> [amb accés el dia 10 d'octubre de 2015]
- <http://marualbini.blogspot.com.es/p/matematica-en-el-mundo.html> [amb accés el dia 10 d'octubre de 2015]
- <http://lolujl.blogspot.com.es/2010/11/el-numero-aureo.html> [amb accés el dia 10 d'octubre de 2015]
- <http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/recaudam.htm > [amb accés el dia 10 d'octubre de 2015]

Música i matemàtiques

- <http://www.iessantanyi.cat/exposiciomatematiques/web2008/cartells/16_fibonacci_musica.pdf> [amb accés el dia 1 de novembre de 2015]
- <https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%BAsica_y_matem%C3%A1ticas> [amb accés el dia 1 de novembre de 2015]
- <http://www.geocities.ws/ccalvimontesr/CUERDAS_STRINGS.html> [amb accés el dia 1 de novembre de 2015]
- <https://es.wikipedia.org/wiki/Monocordio> [amb accés el dia 7 de novembre de 2015]

Música

- <https://ca.wikipedia.org/wiki/M%C3%BAsica> [amb accés el dia 15 de novembre de 2015]
- <https://ca.wikipedia.org/wiki/Interval_musical> [amb accés el dia 15 de novembre de 2015]
- <https://ca.wikipedia.org/wiki/Escala_diat%C3%B2nica> [amb accés el dia 15 de novembre de 2015]

- <https://ca.wikipedia.org/wiki/Modes_r%C3%ADtmics> [amb accés el dia 22 de novembre de 2015]
- <http://torblaeianubrae.blogspot.com.es/2013/03/los-7-modos-de-la-escala-mayor.html> [amb accés el dia 22 de novembre de 2015]
- <https://es.wikipedia.org/wiki/Armon%C3%Ada> [amb accés el dia 28 de novembre de 2015]
- <https://es.wikipedia.org/wiki/Comp%C3%A1s_(m%C3%BAsica)> [amb accés el dia 6 de desembre de 2015]
- <http://blogmusicaclasica.com/ensenanza-musical/lenguaje-musical-temario/tema-5-tipos-de-compases-compas-de-subdivision-binaria-y-compas-de-subdivision-ternaria/> [amb accés el dia 6 de desembre de 2015]
- <http://aprenderguitarradesdecero.blogspot.com.es/2012/03/silencio-suena-la-musica-duracion-de.html> [amb accés el dia 6 de desembre de 2015]
- <https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%BAsica_modernista> [amb accés el dia 13 de desembre de 2015] 13 20 26
- <https://ca.wikipedia.org/wiki/Dodecafonisme> [amb accés el dia 13 de desembre de 2015]
- <https://es.wikipedia.org/wiki/Atonalidad> [amb accés el dia 13 de desembre de 2015]
- <http://www.pianomundo.com.ar/atonalidad.html> [amb accés el dia 13 de desembre de 2015]
- <http://www.filomusica.com/filo37/xenakis.html> [amb accés el dia 23 de desembre de 2015]
- <http://www.conceptoradio.net/2013/04/25/a-fondo-iannis-xenakis/> [amb accés el dia 23 de desembre de 2015]
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Elliott_Sharp> [amb accés el dia 27 de desembre de 2015]
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Arnold_Schoenberg> [amb accés el dia 27 de desembre de 2015]

Per fer els àudios

- YouTube: https://www.youtube.com/?gl=US&hl=ca. Per buscar les cançons.
- Force download: http://www.force-download.es/. Per baixar els vídeos del YouTube en format ".wav".
- Musescore: Per passar a so les cançons fetes per mi.

Documents

- <http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/mat3/ssmat3.pdf> En aquest enllaç podem trobar un document en format pdf sobre successions i sèries numèriques consultat el dia 20 de setembre de 2015.
- <http://foros.musinetwork.com/index.php?action=dlattach;topic=771.0;attach=1515> En aquest enllaç podem trobar un document en format pdf sobre atonalisme, dodecafonisme i serialisme consultat el dia 13 de desembre de 2015.
- <http://www.sectormatematica.cl/musica/Musica%20y%20Matematicas%20De%20Schoenberg%20a%20Xenakis.pdf> En aquest enllaç podem trobar un document en format pdf sobre música atonal consultat el dia 24 de desembre de 2015.
- Manual del programa glmaxima fet pel Manuel Cuadrado l'any 2006. Consultat durant el mes de setembre de 2015.
- Índex del treball cedit per Eduard Gallego.

Vídeos

- https://www.youtube.com/watch?v=SjSHVDfXHQ4 Vídeo sobre la successió de Fibonacci vist al setembre de 2015.

Programes utilitzats

- WxMaxima
- Musescore 2
- Paint
- Microsoft Word 2007

Annexos

Llista d'àudios

Es poden escoltar al llapis de memòria adjunt. Tots estan en format .wav.

- 1-Oh Susanna major, pàgina 27
- 2-Oh Susanna menor, pàgina 27
- 3-Petita serenata nocturna tensió, pàgina 28
- 4-Petita serenata nocturna repòs, pàgina 28
- 5-Arnold Schoenberg-Suite per pianoforte op.25, pàgina 39
- 6-Pierre Boulez-Piano sonata nº2, pàgina 40
- 7-Iannis Xenakis-Metastaseis, pàgina 41
- 8-Fibonacci en Sol major 2 octaves, pàgina 48
- 9-Fibonacci en Si menor 2 octaves, pàgina 48
- 10-Fibonacci melodia i harmonia en Sol major, pàgina 49
- 11-Fibonacci en Si menor 2 octaves amb ritme, pàgina 50
- 12-Fibonacci en Si menor amb ritme i silencis, pàgina 51
- 13-Sèrie original en Sol, pàgina 52
- 14-Sèrie retrògrada en Sol, pàgina 53
- 15-Sèrie invertida en Sol, pàgina 53
- 16-Sèrie retrògrada de l'invertida en Sol, pàgina 54
- 17-Sèrie original en Do, pàgina 55
- 18-Sèrie retrògrada en Do, pàgina 55
- 19-Sèrie invertida en Do, pàgina 56
- 20-Sèrie retrògrada de l'invertida en Do, pàgina 56
- 21-Composició dodecafònica, pàgina 57
- 22-Serialisme amb Fibonacci, pàgina 59
- 23-Serialisme amb Fibonacci i ritme, pàgina 60